Klasična mehanika 1

Prvi dio

Osnovne postavke klasične mehanike. Zakoni sačuvanja. Mehanički sustavi s jednim stupnjem slobode. Koordinatni sustavi.

October 31, 2017

Sadržaj

*

1 Osnovne postavke klasične mehanike

1.1 Uvodne napomene

1.1.1 Kratki povijesni prikaz

Newtonova mehanika (*Isaac Newton, 1643.-1727.*) je prva aksiomatski zaokružena fizikalna teorija Svemira. Kao ishodište moderne znanosti, ona je i prekretnica i poveznica, jer je s jedne strane u sebe uključila i usustavila opažanja i spoznaje akumulirane u ranijim epohama, dok je pak s druge strane dalekodosežnošću i sveobuhvatnošću svojih postavki bila ključna kako za veliko ubrzanje u razvoju znanosti, tako i za početak njenog punog globaliziranja od 17. stoljeća nadalje.

Samom formulacijom Newtonove mehanike kao polazne teorije moderne fizike uspostavljena je i istraživačka metodologija koja se kao nezaobilazna ustalila i kod nastajanja svih kasnijih znanstvenih teorija. Ta metodologija obuhvaća (barem) dva polazna elementa: pojave koje teorija treba objasniti, i postulate na kojima se teorija osniva.

Newton je svojom mehanikom imao za cilj objasniti i astronomska opažanja o gibanjima nebeskih tijela, posebno planeta Sunčevog sustava i njihovih satelita, i gibanja u blizini i na površini Zemlje. Astronomska opažanja akumulirala su se i obogaćivala kroz nekoliko tisućljeća, počevši od sumeranske, babilonske i egipatske i helenske civilizacije od četvrtog tisućljeća pr. Kr. do Ptolomejevog (*Klaudije Ptolomej, oko 85. - oko 165.*) modela iz II stoljeća poslije Kr., pa zatim preko pretežno perzijske, arapske i indijske astronomije u dugom srednjevjekovnom razdoblju do XV stoljeća i novovjekog renesansnog razdoblja u Europi, obilježenog Kopernikovim (*Nikola Kopernik, 1473.- 1543.*) modelom, Keplerovim (*Johannes Kepler, 1571. - 1630.*) fenomenološkim zakonima i novim otkrićima omogućenim korištenjem teleskopa koji je Galilei (*Galileo Galilei, 1564. - 1642.*) izumio i uveo u astronomiju.

Razumijevanje mehaničkih gibanja na Zemlji postupno se razvijalo kroz sve navedene epohe, s naročitim dosezima u helenskoj, perzijskoj, arapskoj i ranoj srednjevjekovnoj europskoj eri, da bi u renesansi doseglo razinu znanstvene egzaktnosti nakon sustavnih ponovljivih eksperimenata koje je pokrenuo Galilei. Tako se, uvođenjem sustava u astronomska i terestrijalna mjerenja, učinio mogućim veliki Newtonov teorijski iskorak.

O postulatima na kojima se Newtonova mehanika temelji će biti više riječi u sljedećem poglavlju. Ukratko, aksiomatizacija prostorno-vremenske strukture ima svoje temelje u helenskim i kasnijim geometrijskim spoznajama, kojima se za prazni prostor postulira Euklidova metrika (*Euklid Aleksandrijski, 323 pr. Kr.- 285 pr. Kr.*), dok je prin-

cip relativnosti koji je omogućio formulaciju Newtonovog determinizma aksiomatizirao Galilei, opet na temelju izravnih i sustavnih opažanja.

Obzirom da je na istim teorijskim postavkama uspješno objasnila i gibanja nebeskih tijela i gibanja na Zemlji, Newtonova mehanika dovela je i do prve velike unifikacije u povijesti fizike. Nakon tih velikih dostignuća ubrzo su se u 18. i 19. stoljeću razvile primjene na sve složenije mehaničke sustave, kao i cijele, na Newtonovoj mehanici utemeljene, nove discipline, posebno Mehanika kontinuuma (tj. teorija elastičnosti i hidrodinamika) te Statistička fizika, polazno kao Kinetička teorija plinova, nakon čega su uslijedile općenitije formulacije. Velike doprinose potvrdi mehanike kao fizikalne teorije i njenom daljnjem razvoju u tom post-newtonovskom razdoblju dali su *Jacob Bernoulli (1655. - 1705.)*, *Johann Bernoulli (1667. - 1748.)*, *Pierre Louis Maupertois (1698. - 1759.)*, *Daniel Bernoulli (1700. - 1782.)*, *Leonhard Euler (1707. - 1783.)*, i mnogi drugi.

Tijekom tog zlatnog razdoblja Newtonov determinizam sve se više primjenjivao na mehaničke sustave koje zbog ograničenja na gibanja ne odlikuje Euklidova metrika. Postupno je to produbljivanje Newtonove mehanike dovelo do alternativne varijacijske formulacije **Klasične mehanike** postavljene na novim principima i matematičkim temeljima. Varijacijska formulacija vrlo je prisutna posvuda i u današnjoj teorijskoj fizici. U njenom su polaznom razvoju najistaknutije uloge imali *Jean le Rond D'Alambert (1717. - 1783.)*, *Joseph- Louis Lagrange (1736. - 1813.)*, *Pierre-Simon Laplace (1749. - 1827.)*, *Adrien-Marie Legendre (1752. - 1833.)*, *Joseph Fourier (1768. - 1830.)*, *Siméon Denis Poisson (1781. - 1840.)*, *William Rowan Hamilton (1805. - 1865.)* i *Carl Jacobi (1804. - 1851.)*.

Varijacijska formulacija dovodi nas do kraja 19. i početka 20. stoljeća, revolucionarnog vremena za fiziku u kojem je uspostavom novih temeljnih teorija došlo do modifikacije svih ključnih postulata Klasične mehanike. Tim su se novim teorijama razriješile neusklađenosti Klasične mehanike s **Maxwellovom teorijom elektromagnetizma** (*James Clerk Maxwell, 1831. - 1879.*) s jedne strane te s nizom novih eksperimentalnih rezultata vezanih uz ponašanje materije na atomskim skalama s druge strane. Pobliže:

- **Euklidova metrika** kojom su aksiomatizirana svojstva praznog prostora nadomještena je općenitijom **Riemannovom metrikom** kao temeljnim konceptom Einsteinove **Opće teorije relativnosti** iz 1915. (*Albert Einstein, 1879. - 1955.*);

- **Galileijev princip relativnosti** nadomješten je nešto ranije **Einsteinovim principom relativnosti** kao temeljnim polazištem **Specijalne teorije relativnosti** iz 1905.;

- Konačno, **Newtonov determinizam** nadomješten je kvantnim principom neodređenosti, tj. **kvantnim indeterminizmom**, kao temeljem postupno uspostavljane **Kvantne teorije** razvijane u razdoblju od 1900. do 1930. godine, i eksplicitno uspostavljene kroz **Heisenbergov princip neodređenosti** (*Werner Heisen-*

berg, 1901.- 1976.) i **Bohrov princip komplementarnosti** (*Niels Bohr, 1885. - 1962.*), oba formulirana 1927. godine.

Klasična mehanika zadržala je međutim asimptotsku valjanost za sve pojave kod kojih su relativne brzine gibanja puno manje od brzine svjetlosti, kada je zakrivljenost prostora zbog prisutnosti masa zanemariva u odnosu na prostorne skale njihovih putanja, i kod kojih su s druge strane prostorne skale putanja puno veće od atomsko-molekularnih skala. Ti uvjeti obuhvaćaju široki raspon mnogih pojava od interesa za niz znanstvenih područja i odgovarajućih tehnoloških primjena.

Istodobno sa spomenutim velikim obratima u povijesti fizike, brzi razvoj matematičkog aparata doveo je do daljnjih produbljivanja i širenja horizonata unutar same Klasične mehanike, zbog čega je ona sve do danas kao istraživački aktivna disciplina ostala na samoj fronti suvremene znanosti.

Posebno se to odnosi na uočavanja da su Klasična mehanika i njene izvedenica relevantne teorije za pojave, koje su prisutne u raznorodnim prirodoslovnim, tehničkim, biomedicinskim i društvenim znanostima, a obuhvaća ih skupni naziv **Klasičnog determinističkog kaosa**. Polazni zamah ovom aspektu Klasične mehanike dali su među ostalima *Henri Poincaré (1854. - 1912.)*, *Aleksandr Lyapunov (1857. - 1918.)*, *George David Birkhoff (1884. - 1944.)*, dok su kasnijem razumijevanju složenih kaotičnih struktura mehaničkih faznih prostora posebno doprinijeli *Andrei Kolmogovov (1903. - 1987.)*, *Vladimir Arnold (1937. - 2010.)*, *Jürgen Moser (1928. - 1999.)*, *Jakov Sinai (1935.)* i mnogi drugi. Dodatni poticaj velikom znanstvenom i širem javnom interesu u proteklih nekoliko desetljeća za teme vezane uz deterministički kaos, i složene dinamičke sustave općenito, dao je brzi razvoj računalnih tehnologija i novih numeričkih i simulacijskih metoda. To je samo jedan od razloga zbog kojih je Newtonova mehanika i nakon više od tri stoljeća zadržala svoju aktualnost i svježinu.

1.1.2 Sadržaj, svrha i ciljevi kolegija Klasična mehanika

Kolegij **Klasična mehanika I** započinje prikazom povijesnih početaka Newtonove mehanike. Uvode se postavke teorije, koncept trome mase i zakoni očuvanja, da bi se nastavilo iscrpnom analizom problema dvaju tijela i Keplerovih zakona za gibanja pod utjecajem gravitacijskog međudjelovanja. Nakon prikaza metode mehaničke sličnosti i virijalnog teorema, prelazi se na sustave s ograničenjima na gibanja, što je priprema za prijelaz na varijacijsku formulaciju mehanike i uvođenje funkcionala djelovanja i Lagrangeove funkcije. Newtonova i varijacijska formulacija povezuju se uvođenjem D'Alambertovog principa. Ostatak kolegija posvećen je primjeni Lagrangeove mehanike na razne mehaničke sustave, posebno na iscrpnu analizu dinamike pojedinih klasa krutih tijela.

Na početku kolegija *Klasična mehanika II* se, uvođenjem harmoničke aproksi-

macije, razmatraju gibanja mehaničkih sustava u blizini ravnotežnih stanja. Nastavak kolegija posvećen je daljnjim generaliziranim formulacijama Klasične mehanike: kanonskoj Hamiltonovoj, pa zatim Hamilton-Jacobijevoj te formulaciji preko Poissonovih zagrada. U tom sklopu se prate teme vezane uz opća svojstva faznih prostora. Posebice se, nakon uvođenja kanonskih varijabli kut-djelovanje, uspostavlja podjela na integrabilne i neintegrabilne sustave. Konačno, korištenjem metode infinitezimalnih kanonskih transformacija Noetherinim teoremom (*Amalie Emmy Noether, 1882. - 1935.*) povezuju se simetrije i zakoni očuvanja, da bi se na kraju u formulaciji kanonskih varijabli kuta i djelovanja analizirala svojstva sustava sa sporim (adijabatskim) vremenskim promjenama.

Kolegiji **Klasična mehanika I i II** prvi su u nizu *teorijske vertikale* studijskog programa za petogodišnji studij istraživačke fizike na PMF-u. Stoga svrha kolegija nije samo prikaz povijesnih početaka moderne fizike, nego i uspostava temelja na koje se, us matematičke temelje pokrivene kolegijem Matematičke metode fizike, u kontinuitetu mogu nastaviti daljnje etape spomenute vertikale u višim godinama studija.

Taj se kontinuitet ovim kolegijima nastoji postići i konceptualno-sadržajno i metodološki. Zbog toga se i uvodi niz metodologija na kojima se temelji suvremena teorijska fizika, i koje se jednostavno i zorno mogu ilustrirati na klasično mehaničkim općim temama i konkretnim primjerima. Posebice se to odnosi na varijacijsku metodu i uvođenje Lagrangeove i Hamiltonove funkcije koje su nezaobilazne u kvantnoj teoriji i pojedinim teorijama polja. Kratki osvrt na metodu mehaničke sličnosti istodobno je i elementarni uvod u formalizam skaliranja i renormalizacijske grupe naročito važne u današnjoj statističkoj fizici, fizici kondenzirane materije i fizici elementarnih čestica. Slični su i motivi za uvođenje metode Greenovih funkcija i metode infinitezimalnih kanonskih transformacija u Klasičnoj mehanici II. Nadalje, razradama fizikalne interpretacije Hamilton-Jacobijeve funkcije, tehnike Poissonovih zagrada i koncepta adijabatske invarijante uspostavlja se dodir s odgovarajućim formulacijama Kvantne teorije: Schrödingerovom (*Erwin Schrödinger, 1887. - 1961.*), Heisenbergovom, i formulacijom preko kvantizacije faznog prostora iniciranom već *Starom kvantnom mehanikom* Bohra, Rutherforda (*Ernest Rutherford, 1871.- 1937.*) i Sommerfelda (*Arnold Sommerfeld, 1868. - 1951.*) na samom početku XX stoljeća. Konačno, uvođenjem Liouvilleovog teorema (*Joseph Liouville, 1809. - 1882.*), Poincaréovih integralnih invarijanti i Poincaréovog teorema povratka otvara se puta prema temeljnim postavkama Statističke fizike.

1.2 Postulati i aksiomatska polazišta

Ljudsko iskustvo, pa time i poimanje o vremenu i prostoru, tj. o Svemiru (Univerzumu), mijenjalo se od ranih civilizacija do danas. U povijesti civilizacije bilo je nekoliko prevrata u aksiomatizaciji vremensko-prostorne strukture. Svaki od tih aksiomatskih sustava temeljio se na već ranije razvijenim matematičkim, posebno geometrijskim, konceptima.

Ovdje ćemo se ograničiti na sustav na kojem se temelji Klasična mehanika. Njega su formulirali Galilei i Newton, polazeći od Euklidove geometrije kao matematičke podloge. Aksiomatizacija Klasične mehanike obuhvaća također i dva fizikalna postulata, Galileiev princip relativnosti i Newtonov determinizam.

1.2.1 Prostorno-vremenska struktura

Svemir

Newtonova mehanika ima za cilj objasniti gibanja, pobliže odgovoriti na pitanje kako se protjecanjem vremena mijenjaju položaji jednog ili više tijela u prostoru. Prvi korak u tom smjeru je uspostaviti svojstva same prostorno-vremenske strukture, i tako uvesti karakterizaciju prostornog položaja bilo kojeg tijela u danom trenutku, tj. danog događaja[1].

Skup svih događaja u prostoru i vremenu (tj. skup svih svemirskih točaka) nazivamo Svemirom. Prije nego dođemo do opisa gibanja kao vremenskih sljedova događaja, trebamo uvesti način na koji se dolazi do odgovora na pitanje: gdje i kada se dani događaj dogodio. Iskustveno, za tu karakterizaciju su potrebna četiri skalarna podatka prikazana realnim brojevima: tri da bi se odgovorilo na pitanje "gdje?" i jedan da bi odgovorilo na pitanje "kada?". Nadalje, također iskustveno, opis danog događaja je bez izuzetka karakterizacija odnosa tog događaja i nekog drugog, "referentnog" događaja. Uvijek odgovaramo na pitanja:

- Gdje, u odnosu na neku točku u prostoru?
- Kada, u odnosu na neki trenutak?

Aksiomatizacija

Potrebno je dakle zadati način izbora referentnog događaja, tj. referentne prostorne točke i referentnog vremenskog trenutka. U Newtonovoj mehanici koristimo sljedeći, aksiomatski utemeljen, postupak :

- U Svemiru $\mathcal{S}^4$ se svaki događaj može izabrati za referentni, što je svojstvo **afinog prostora**.

[1] Uočimo da se ovdje prostor i vrijeme uvode kao temeljne datosti. Ne otvaramo pitanja kao što su: "što je prostor?", "što je vrijeme?", i slično, već prostor i vrijeme aksiomatiziramo onoliko koliko je potrebno za formulaciju dane fizikalne teorije, u ovom slučaju Klasične mehanike.

- Nakon što se izabere jedan događaj $a \in \mathcal{S}^4$ (dana točka u trodimenzionalnom prostoru i dani vremenski trenutak), za karakterizaciju bilo kojeg drugog događaja $b \in \mathcal{S}^4$ se uvodi razlika

$$b - a = (t_{b-a}, \vec{x}_{b-a}) \in \mathbb{R}^4. \tag{1.1}$$

Sve razlike događaja su elementi vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$, **zadanog nad afinim prostorom $\mathcal{S}^4$**. Pritom je vektorski prostor $\mathbb{R}^4$ direktni umnožak dvaju vektorskih prostora

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{T}^1 \otimes \mathbb{L}^3. \tag{1.2}$$

$\mathbb{T}^1$ je prostor vremenskih razlika izomorfan skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$. Svaki njegov element $t_{b-a} \in \mathbb{T}^1$, se definira kao vremenska razlika, odnosno kao interval između dvaju događaja, b i a. $\mathbb{L}^3$ je pak trodimenzionalni vektorski prostor, čiji su elementi vektori položaja spram položaja referentnog događaja a. Svaki element tog prostora, $\vec{x}_{b-a} \in \mathbb{L}^3$, može se prikazati kao linearna kombinacija bilo koja tri linearno nezavisna vektora $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, koji definiraju dani izbor Kartezijeve baze u prostoru $\mathbb{L}^3$,

$$\vec{x}_{b-a} = x_{1,b-a}\vec{e}_1 + x_{2,b-a}\vec{e}_2 + x_{3,b-a}\vec{e}_3. \tag{1.3}$$

Rekapitulirajmo kako je u afinom prostoru $\mathcal{S}^4$ definirana samo razlika[2] dvaju elemenata (1.7), koja je element vektorskog prostora $\mathbb{R}^4 = \mathbb{T}^1 \otimes \mathbb{L}^3$. Drugim riječima, što se tiče prostora $\mathcal{S}^4$, definirano je samo preslikavanje sa $\mathcal{S}^4$ na $\mathbb{R}^4$, i to nakon izbora referentne točke Svemira. U prostorima $\mathbb{T}^1$ i $\mathbb{L}^3$ definirane su pak sve operacije svojstvene skupu realnih brojeva ($\mathbb{T}^1$), odnosno vektorskom prostoru ($\mathbb{L}^3$).

Pobliže u prostoru $\mathbb{L}^3$ je, kao i u prostoru vremenskih razlika $\mathbb{T}^1$, definirano zbrajanje elemenata, množenje s realnim brojevima, nul-element (zadan izborom referentnog događaja), i t. d., ukratko definirana je algebra. Posebno, relativna udaljenost dva događaja b i c,

$$b - c = (t_{b-a}, \vec{x}_{b-a}) - (t_{c-a}, \vec{x}_{c-a}) = (t_{b-c}, \vec{x}_{b-c}), \tag{1.4}$$

je također element vektorskog prostora $\mathbb{R}^4 = \mathbb{T}^1 \otimes \mathbb{L}^3$. Jedn. (1.4) također eksplicitno naznačuje afinost prostora $\mathcal{S}^4$, po kojoj se s danog događaja a može prijeći na izbor bilo kojeg drugog događaja c kao referentnog.

Nadalje, u prostoru $\mathbb{L}^3$ definirano je i skalarno množenje dvaju vektora položaja. Izaberimo kao Kartezijevu bazu bilo koju trojku ortonormiranih vektora za koju vrijedi "tablica množenja"

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l \end{cases} . \tag{1.5}$$

[2] Znak "-" na lijevoj strani jedn. 1.7 ima značenje **operacije razlike**, a ne oduzimanja. Njome se dva **različita** elementa afinog prostora preslikavaju u "nadprostor" $\mathbb{R}^4 = \mathbb{T}^1 \otimes \mathbb{L}^3$. Tek nakon što se definiraju vektorska svojstva prostora $\mathbb{T}^1$ i $\mathbb{L}^3$ operacija "-" dobiva uobičajeno značenje oduzimanja u tim prostorima, kao u jedn. (1.4).

Tada je skalarni umnožak dvaju vektora definiran izrazom

$$\vec{x}_{b-a} \cdot \vec{x}_{c-a} = x_{1,b-a}x_{1,c-a} + x_{2,b-a}x_{2,c-a} + x_{3,b-a}x_{3,c-a}. \tag{1.6}$$

Konačno, uvodi se i definicija prostorne udaljenosti između događaja b i a,

$$d(b,a) \equiv \sqrt{\vec{x}_{b-a} \cdot \vec{x}_{b-a}} = \sqrt{x_{1,b-a}^2 + x_{2,b-a}^2 + x_{3,b-a}^2}. \tag{1.7}$$

Prostor s ovako definiranom udaljenošću za svaki par vektora položaja je prostor s Euklidovom metrikom. Iz same te definicije uočava se da u euklidskom prostoru vrijedi Pitagorin teorem.

Dodatne napomene

Ovim slijedom definicija aksiomatizirana je prostorno-vremenska struktura na kojoj se temelji Newtonova mehanika. Sažeto, Svemir je afin prostor, u kojem je vrijeme varijabla izomorfna skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$, dok je prostor trodimenzionalni vektorski prostor s Euklidovom metrikom. U njemu je svaka od tri Kartezijeve koordinate također varijabla izomorfna skupu $\mathbb{R}$. U Klasičnoj mehanici, i u fizici općenito, vremenski intervali i prostorne udaljenosti su izabrane kao dvije (od tri, u mehanici) temeljne dimenzije preko kojih će se izražavati dimenzija svih drugih mjerljivih veličina.

Izomorfnost vremenske i triju prostornih varijabli sa skupom $\mathbb{R}$ je izravna posljedica afinosti Svemira. Njome i vrijeme i prostor imaju svojstvo **homogenosti**: translacije u vremenu i prostoru prevode nas iz jedne u drugu točku istih svojstava. Nadalje zbog neovisnosti udaljenosti (1.7) o izboru smjerova jediničnih vektora u ortonormiranoj bazi (1.5)[3] prostor ima i svojstvo **izotropnosti**: u njemu su svi smjerovi ekvivalentni, tj. nema nijednog smjera koji bi imao svojstva drugačija od drugih smjerova.

Afinost prostora $\mathcal{S}^4$ i spomenute homogenosti vremena i prostora dozvoljavaju punu slobodu u izboru referentnog događaja, dok izotropnošću prostora imamo i slobodu u izboru smjerova ortonormirane Kartezijeve baze jediničnih vektora. Te se slobode u pojedinim primjerima mehaničkih sustava u prostoru euklidske metrike koriste tako da se pogodno izabere referentni događaj, i tako olakša rješavanje diferencijalnih jednadžbi gibanja i razmatranje putanja koje su rješenja ih jednadžbi. U tehničkom smislu se takav izbor najčešće naziva izborom vremenskog ishodišta, prostornog ishodišta i Kartezijevih osi. U pripadnom zapisu vremenske varijable i prostornih koordinata tada se u pravilu ispuštaju indeksi koji označavaju referentnu točku i tijelo, a i b, i piše:

$$t_{b-a} \to t, \quad \vec{x}_{b-a} \to \vec{x}, \tag{1.8}$$

[3]Dokaz ove tvrdnje slijedi provedbom ortogonalne transformacije, kojom se povezuju dva izbora Kartezijeve baze (1.5), u definicijskom izrazu (1.7).

što će uvijek, osim kada se posebno ne naznači da je drugačije, biti slučaj i u nastavku naših razmatranja[4].

Navedene izomorfnosti sa skupom realnih brojeva $\mathbb{R}$ znače da su i vrijeme i prostor kontinuirani, tj. da nema ni jedne vremenske ili prostorne skale koja bi imala svojstva drugačija od ostalih. To, između ostalog, pruža slobodu u izboru mjernih jedinica za vremensku i prostorne varijable. Ta je sloboda izražena u raznim konvencijama vezanim uz definicije mjernih jedinica. U SI sustavu mjerne jedinice za vrijeme i udaljenost su sekunda[5] i metar[6].

Eksperimentalno je kontinuiranost danas provjerljiva u rasponu od 42 reda veličina i za vrijeme i za prostor[7].Pobliže, najmanje eksperimentalno dostupne vremenske skale su 10^{-24} sekunde (prolaz svjetlosnog vala kroz jezgre), dok se najveća vremenska skala pripisuje starosti Svemira i iznosi 10^{18} sekundi. Najmanje mjerenju dostupne prostorne udaljenosti su pak reda 10^{-15} metara (radijusi atomskih jezgri), dok se najveća prostorna skala pripisuje veličini Svemira i iznosi 10^{27} metara[8].

Treba istaknuti da se, iako ima dosta analogije u definicijama i interpretacijama vremenske i prostorne varijable[9], vremenska varijabla suštinski razlikuje od prostorne. Dovoljno se podsjetiti da je smisleno reći kako su se dva događaja dogodila na raznim mjestima u istom vremenu, ali da nema smisla reći da su se ona dogodila na istom mjestu u raznim vremenima (jer druga tvrdnja ovisi o relativnom gibanju referentnih promatrača). Drugim riječima, u Newtonovoj mehanici vrijeme je separirano od prostora, i kao takvo je apsolutno. Dani vremenski trenutak zajednički je i jednak u svim točkama prostora. Zbog toga se može uvesti i koncept "trenutnog Svemira", tj. "snimke" Svemira u danom trenutku, definiranjem afinog prostora $\mathcal{S}^3$ kao skupa svih istodobnih događaja, kao i vektorskog prostora $\mathbb{L}^3$ nad $\mathcal{S}^3$, čiji su elementi svi vektori $\vec{x}_{b-a}$ za koje je vremenski interval t_{b-a} isti, odnosno neovisan o b.

Spomenimo da su ranija, pred-newtonovska, povijesna poimanja o Svemiru bila drugačija. Svemir se nije percipirao kao afini prostor te se nije prihvaćao koncept po kojem svaki događaj može biti vremensko i prostorno ishodište, s neograničenom prošlošću i budućnošću, i jednako tako neograničenim prostornim prostiranjem. Namjesto toga vrijedili su drugačiji postulati i/ili dogme, na pr. oni o izuzetnom vremenskom ishodištu vezanom uz stvaranje svijeta, i o Zemlji kao središtu Svemira unutar Geocentričnog

[4]Kada ih sustav bude imao više, indeksima će se označavati tijela; $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$,...

[5]Sekunda je trajanje od 9 192 631 770 perioda zračenja koje odgovara prijelazu između dviju hiperfinih razina osnovnog stanja atoma cezija 133 na temperaturi od 0 K.

[6]Jedan metar jednak je putu koji svjetlost prijeđe u vakuumu za 1/299 792 458 dio sekunde.

[7]Uočiti intrigantnu podudarnost dvaju raspona, koja bi se zadržala i u bilo kojem drugom, različitom od dekadskog, izboru mjere odnosa skala.

[8]Podsjetimo da Newtonova mehanika ne vrijedi ni u jednom od navedenih rubnih podruåja skala.

[9]Obje su varijable izomorfne sa skupom realnih brojeva, kolokvijalno se događaji mogu poredati i pridijeliti im naznake "prije" i "poslije" i na vremenskoj i na prostornoj osi, i slično.

modela gibanja svemirskih tijela, posebno planeta Sunčevog sustava.

1.3 Galileiev princip relativnosti

Odaberimo jedan referentni sustav, odnosno jedan događaj $a \in \mathcal{S}^4$, i postavimo sljedeće pitanje:

- Koji je širi skup referentnih sustava, uključujući i odabrani, u kojima jednadžbe gibanja za mehanički sustav s jednim ili više tijela zadržavaju isti oblik?

Očigledno je da će u skladu s aksiomom o afinosti prostora $\mathcal{S}^4$, u tom skupu biti svi sustavi koji miruju spram odabranog sustava a. Pitanje je ima li i drugih sustava s traženim svojstvom.

Galilei je na osnovu zaključaka dobivenih iz pojedinih mjerenja i opažanja došao do odgovora kojeg je podigao na razinu općeg postulata, tj. Galileievog principa relativnosti. On glasi:

- Taj skup obuhvaća i sve sustave koji se spram odabranog gibaju pravocrtno i jednoliko (s konstantnom brzinom) $\vec{v}$, i nijedne druge.

U matematičkom smislu to znači da su jednadžbe gibanja invarijantne na transformacije kojima se iz jednog sustava prelazi u drugi, koji spram njega miruje ili se giba jednoliko po pravcu[10]. Opisna se pak interpretacija Galileievog principa, prenesena u njegovo vrijeme, svodi na tvrdnju:

- Ako je jedan sustav onaj u kojem luka miruje, a drugi sustav jedrenjak koji se spram luke giba pravocrtno i jednoliko, tada ne postoji način provjere kojom bi putnik u zatvorenoj kabini bez prozora utvrdio da li se jedrenjak giba ili miruje spram luke. Analogni primjer je referentni sustav na površini Zemlje i putnik u avionu koji se giba jednoliko i pravocrtno.

1.3.1 Inercijalni sustavi

Za bilo koja dva referentna sustava koja pripadaju skupu sustava za koji vrijedi Galileiev princip relativnosti kažemo da su međusobno **inercijalni**. Ishodišta dvaju inercijalnih referentnih sustava iz navedenog skupa odgovaraju događajima $a, b \in \mathcal{S}^4$ vezanim relacijom

$$b - a = (t, \vec{x}_0 + \vec{v}t), \tag{1.9}$$

[10]Uočimo da definicija pravca izravno slijedi iz aksiomatski uvedene Euklidove metrike prostora.

gdje je $\vec{x}_0$ položaj ishodišta sustava b u trenutku $t = 0$. Bilo koja točka, koja je u referentnom sustavu a određena koordinatama $(t, \vec{x})$, u referentnom sustavu b ima koordinate $(t, \vec{x}_0 + \vec{x} + \vec{v}t)$. Inercijalni sustavi za koje je $\vec{v} = 0$ su poseban (trivijalni) slučaj sustava koji su u međusobnom relativnom mirovanju.

1.3.2 Galileieva grupa

Ovako definirana, inercijalnost je relativni odnos dvaju referentnih sustava koji pripadaju skupu sustava vezanih Galileievom relativnošću[11]. Transformacije koje povezuju sve referentne sustave u inercijalnom odnosu definiraju Galileievu grupu[12].

Galileieva grupa ima deset parametara, tj. svaka transformacija jednoznačno je određena s deset skalarnih podataka kojima se zadaju: translacija u vremenu (1 podatak), translacija u prostoru (3 podatka), ortogonalna transformacija, tj. prijelaz s jedne orijentacije Kartezijevih osi na drugu (3 podatka) te transformacija iz jednog sustava u drugi koji se spram njega giba konstantnom brzinom (3 podatka). Svakom takvom transformacijom iz Galileieve grupe sačuvan je vremenski interval između bilo koja dva događaja te prostorna udaljenost bilo koja dva istovremena događaja.

Invarijantnost jednadžbi gibanja na Galileievu grupu analizirati će se nakon što postuliramo Newtonov determinizma kojim će se uspostaviti klasično-mehaničke jednadžbe gibanja.

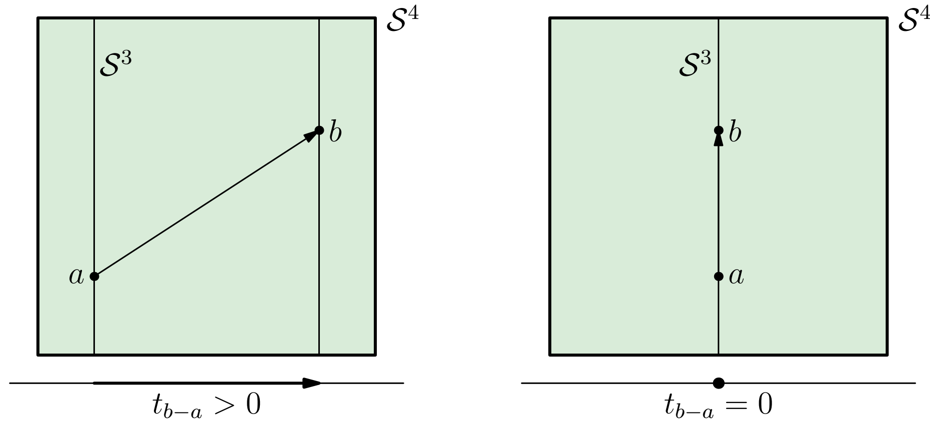
1.4 Newtonov determinizam

1.4.1 Brzina, ubrzanje, konfiguracijski prostor

Krenimo od sustava n tijela (materijalnih točaka) i pratimo ga u vremenu. Neka su u trenutku t položaji tijela u izabranom referentnom sustavu $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$.

[11]Treba napomenuti kako je od samih početaka, od Newtona nadalje prisutno pitanje postojanja apsolutnog prostora mirovanja Svemira (često zvanog eter), i pripisivanja inercijalnosti sustavima koji se spram tog apsolutnog referentnog sustava gibaju konstantnim brzinama. To se pitanje zaoštrilo, pa zatim razriješilo, u drugoj polovici XIX stoljeća u kojoj je Michelson-Morley eksperiment, naznačio neodrživost koncepta etera. Novo razumijevanje ovog pitanja unijela je Einseinova specijalna teorija relativnosti, kojom Galileijev princip relativnosti za inercijalne sustave dobiva novi sadržaj nakon uvođenja zahtjeva da je brzina svjetlosti najveća moguća brzina, jednaka u svim sustavima, nakon čega vrijeme prestaje biti apsolutno i separirano od prostora.

[12]Množenje u Galileijevoj grupi odgovara dvjema sukcesivnim transformacijama, što je također transformacija. Inverzni element je transformacija koja nas nakon dane transformacije vraća u polazni referentni sustav. Jedinični element je pak transformacija identiteta kojom se ostaje na polaznom referentnom sustavu.



Slika 1.1: Shematski prikaz neistovremenih (lijevo) i istovremenih (desno) događaja.

Mijenjanje položaja i-tog tijela u vremenu, zadano preslikavanjem $\vec{x}_i(t) : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{L}^3$ zovemo putanjom ili trajektorijom tog tijela.

Osim u posebnim slučajevima, uglavnom ćemo se susretati s preslikavanjima (tj. putanjama) za koja su $\vec{x}_i(t)$ analitičke vektorske funkcije vremena, tako da su derivacije tih funkcija po vremenu dobro definirane. Posebno uvodimo **brzinu** i-tog tijela kao prvu derivaciju putanje po vremenu

$$\vec{v}_i(t) \equiv \dot{\vec{x}}_i(t) \equiv \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\vec{x}_i(t+\delta t) - \vec{x}_i(t_0)}{\delta t}. \tag{1.10}$$

Brzine $\dot{\vec{x}}_i(t)$ su također elementi vektorskog prostora koji se naziva tangentim prostorom za prostor $\mathbb{L}^3$, a označiti ćemo ga s $\mathbb{L}^3_v$. Druga derivacija putanje po vremenu je **ubrzanje (akceleracija)** tijela

$$\ddot{\vec{x}}_i \equiv \frac{d\,\dot{\vec{x}}_i}{dt^2} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\dot{\vec{x}}_i(t+\delta t) - \dot{\vec{x}}(t)}{\delta t}. \tag{1.11}$$

Vektori ubrzanja elementi su tangentnog prostora za prostor $\mathbb{L}^3_v$. Označiti ćemo ga s $\mathbb{L}^3_a$. Iako se ovaj slijed deriviranja može nastaviti, to neće biti potrebno obzirom da se, kao što ćemo uskoro vidjeti, u Klasičnoj mehanici susrećemo samo s brzinama i ubrzanjima.

Kao što vidimo, gibanje cijelog sustava od n tijela određeno je s n putanja $\vec{x}_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Da bismo imali cjelovit prikaz takvog gibanja uvesti ćemo konfiguracijski prostor $\mathbb{L}^{3n}$, kao direktni umnožak trodimenzionalnih prostora za svako tijelo. Dakle

$$\mathbb{L}^N = \underbrace{\mathbb{L}^3 \otimes \mathbb{L}^3 \otimes \cdots \otimes \mathbb{L}^3}_{\text{n puta}},\ N = 3n. \tag{1.12}$$

Sveukupnu putanju sustava u konfiguracijskom prostoru predočiti ćemo vektorom

$$\vec{x}(t) \equiv \{\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t)\} : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{L}^N. \tag{1.13}$$

Broj skalarnih funkcija zadanih ovim preslikavanjem, N, nazivat ćemo **brojem stupnjeva slobode** sustava. Kasnije, u razmatranju sustava u kojima će pojedinim tijelima zbog ograničenja na gibanje putanje biti zadane s manje od tri (tj. s jednom ili dvije) skalarne koordinate, dimenzije pripadnih konfiguracijskih prostora bit će umanjene, i moći će poprimiti bilo koju cjelobrojnu vrijednost od jedan nadalje.

1.4.2 Newtonov deterministički postulat

Newtonov aksiom glasi:

- **Položaji i brzine materijalnih točaka u danom trenutku jednoznačno određuju njihovo gibanje i u budućnosti i u prošlosti.**

Ovaj aksiom se osniva na iskustvu. Formuliran je u povijesnom trenutku u kojem nije bila poznata niti jedna pojava za koju on ne bi vrijedio.

Newtonov aksion znači da se iz poznavanja vektora položaja $\vec{x}(t)$ i brzine $\dot{\vec{x}}(t)$ u danom trenutku t_0, apriori može odrediti putanja sustava $\vec{x}(t)$ u konfiguracijskom prostoru za sva ranija ($t < t_0$) i kasnija ($t > t_0$) vremena. Jednoznačnost vektorske funkcije $\vec{x}(t)$ (koju tek treba odrediti u skladu s gornjim aksiomom), podrazumjeva, uz pretpostavke njene analitičnosti, i jednoznačnost njenog razvoja u Taylorov red po potencijama vremenske razlike $t-t_0$. Drugim riječima, Newtonov aksiom podrazumijeva da su i sve vremenske derivacije (više od prve) funkcije $\vec{x}(t)$ u trenutku t_0, jednoznačne funkcije položaja i brzine u tom trenutku. Posebno to vrijedi i za drugu derivaciju vektora položaja, odnosno ubrzanje u tom trenutku. Kako ova argumentacija vrijedi za bilo koji trenutak, Newtonov aksiom omogućava prikaz ubrzanja sustava $\ddot{x}(t)$ kao neke vektorske funkcije koja ovisi položaju, brzini i vremenu:

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t). \tag{1.14}$$

Drugim riječima, Newtonovim aksiomom pretpostavlja se da za svaki mehanički sustav postoji funkcija $\vec{\mathcal{F}}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ te da se poznavanjem te funkcije **sve** putanje $\vec{x}(t)$ mogu odrediti kao rješenja diferencijalne jednadžbe (1.14). Jednadžbu (1.14) zovemo **Newtonova jednadžba**). To je diferencijalna jednadžba drugog reda za vektor $\vec{x}(t)$, tj. sustav od N vezanih skalarnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda za skalarne koordinate koje čine vektor $\vec{x}(t)$. U skladu s Newtonovim aksiomom, dano partikularno rješenje tog sustava jednadžbi $\vec{x}(t)$, jednoznačno je određeno zadavanjem **početnih uvjeta** u trenutku $t = t_0$:

$$\vec{x}(t = t_0) \equiv \vec{x}_0, \quad \dot{\vec{x}}(t = t_0) \equiv \dot{\vec{x}}_0. \tag{1.15}$$

Funkcija $\vec{\mathcal{F}}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ sadrži fizička svojstva danog mehaničkog sustava. U nastavku razmatranja prvo ćemo ustanoviti njena opća svojstva. Nakon toga ćemo za konkretne

fizičke sustave pokazati kako se ona može zadati, bilo kroz fenomenološko određivanje, bilo kroz teorijsko modeliranje.

1.4.3 Dodatne napomene

Uz Newtonov, zamislivi su i mnogi drugi deterministički sustavi, na pr. onaj u kojem bi gibanje u budućnosti i prošlosti bilo jednoznačno određeno položajima, brzinama i ubrzanjima u danom trenutku. Međutim, njihovo ostvarivanje, za razliku od Newtonovog determinizma, nije zamijećeno u stvarnosti.

Newtonovom jednadžbom (1.14) prešli smo s opisnog na matematički izričaj Newtonovog determinizma, tj. na sustav vezanih običnih diferencijalnih jednadžbi (dok god je broj stupnjeva slobode konačan). U samom njihovom rješavanju, tj. nalaženju pojedinih partikularnih rješenja, jedna moguća metoda njihovog određivanja je zadavanje početnih uvjeta (1.15), čime opisna formulacija postulata preuzima i ulogu matematičkog alata. U širim matematičkim okvirima teorije sustava diferencijalnih jednadžbi takav izbor partikularnih rješenja je samo jedan od niza mogućih[13]. Dolazimo tako do pitanja jesu li moguće alternativne formulacije Newtonovog aksioma koje bi sjedne strane uzimale u obzir šire matematičke mogućnosti, dok bi s druge strane bile ekvivalente već izrečenoj. Odgovor na to pitanje je potvrdan, kao što će se vidjeti u nastavku predavanja.

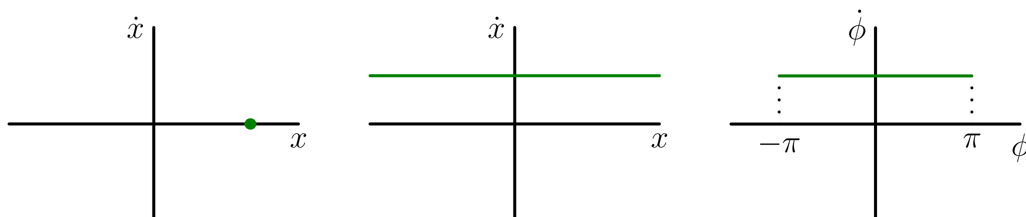
Konačno, važno je uočiti kako se u općoj formulaciji Newtonovog determinizma ne specificira metrika prostora u kojem se sustav giba. Jedino što se zahtijeva je kontinuiranost vremena i svih koordinata u konfiguracijskom prostoru. Tek za sustav materijalnih točaka u praznom prostoru koji ćemo razmotriti u sljedećem poglavlju će do izražaja doći specifikacija triju koordinata za svaku materijalnu točku i Euklidova metrika prostora u kojem se materijalne točke nalaze. Sam Newtonov determinizam vrijedit će dakle i za sustave koji se ne mogu opisati kao sustav materijalnih točaka u praznom prostoru, već će u sebi uključivati i razne vrste ograničenja na gibanja.

1.5 Invarijantnost Newtonove jednadžbe

Pojam faznog prostora

Prije nego izvedemo uvjete koje mora zadovoljavati Newtonova jednadžba da bi bila invarijantna na Galileieve transformacije, uvest ćemo pojam *faznog prostora*. Radi se

[13] Jedan od primjera su putanje koje se određuju iz zahtjeva da prolaze kroz dvije zadane točke konfiguracijskog prostora u danim trenutcima. Spomenimo primjere: putanje interplanetarnih svemirskih brodova, topnička i raketna gađanja, ubacivanje lopte u koš, izvođenje slobodnog udarca u nogometu, i t. d.



Slika 1.2: Putanja u faznom prostoru za česticu koja miruje (lijevo), giba se jednoliko po pravcu (sredina) ili se giba jednoliko po kružnici (desno). U zadnjem slučaju varijabla kuta ϕ mijenja se između $-\pi$ i π.

o prostoru razapetom položajima i brzinama. U slučaju jedne čestice koja se giba u jednodimenzionalnom potprostoru prostora $\mathbb{L}^3$, fazni prostor je dvodimenzionalan (varijable su položaj x i brzina $\dot{x}$). Za česticu koja se giba u trodimenzionalnom prostoru, fazni prostori je šesterodimenzionalan ($\vec{x}$, $\dot{\vec{x}}$), dok za sustav od n čestica fazni prostor ima dimenziju $6n$ ($\vec{x}_1,\ldots$, $\vec{x}_n$, $\dot{\vec{x}}_1,\ldots,\dot{\vec{x}}_n$). Općenito, dimenzija faznog prostora je dvostruko veća od broja stupnjeva slobode sustava. Navodimo putanje u faznom prostoru za neke jednostavne mehaničke sustave:

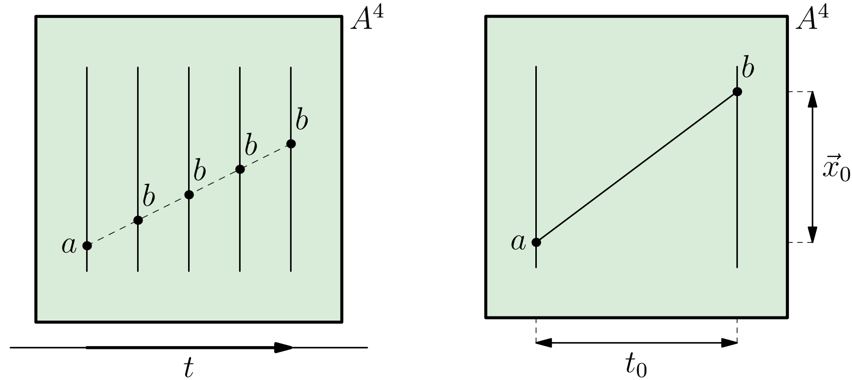
1. Čestica miruje. Putanja u faznom prostoru je točka.
2. Čestica se giba jednoliko po pravcu. Putanja u faznom prostoru je horizontalni pravac.
3. Čestica se giba jednoliko po kružnici. Varijable u faznom prostoru su kut ϕ koji se mijenja na intervalu $[-\pi, \pi]$ i kutna brzina $\dot{\phi}$.

Prijelazom na fazni prostor vrijeme postaje parametar. Skice putanja za gore navedene sustave nalaze se na sl. 1.2.

Galileieva grupa transformacija

Galileieve transformacije su sve transformacije koordinatnih sustava koje prevode jedan inercijalni sustav u drugi. Skup Galileievih transformacija ima strukturu grupe, a svaku transformaciju možemo prikazati kao kompoziciju sljedećih transformacija:

1. translacija u vremenu: $t \to t + s$,
2. translacija u prostoru: $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{s}$,
3. jednoliko gibanje po pravcu brzinom $\vec{v}$: $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{v}t$,
4. rotacija koordinatnih osi: $\vec{x} \to G\vec{x}$.



Slika 1.3: Shematski prikaz događaja u sustavima a i b koji se jedan nasuprot drugog gibaju jednoliko po pravcu brzinom v (lijevo). Shematski prikaz događaja u sustavima a i b čija su vremenska ishodišta udaljena za t_0, a prostorna za $\vec{x}_0$ (desno).

Invarijantnost na translaciju u vremenu

Promatramo promjenu vremenskog ishodišta trajektorije $t \to t' = t + s$. Putanja $\vec{x}(t)$ prelazi u $\vec{x}(t+s) = \vec{x}'(t)$, a Newtonova jednadžba u

$$\ddot{\vec{x}}(t+s) = \vec{\mathcal{F}}[\vec{x}(t+s), \dot{\vec{x}}(t+s), t+s] \Longleftrightarrow \ddot{\vec{x}}'(t) = \vec{\mathcal{F}}[\vec{x}'(t), \dot{\vec{x}}'(t), t+s]. \qquad (1.16)$$

Jednadžba gibanja mora imati isti oblik kao i početna za svaki s. Stoga funkcija $\vec{\mathcal{F}}$ ne smije eksplicitno ovisiti o vremenu

$$\vec{\mathcal{F}}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \vec{\mathcal{F}}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}). \qquad (1.17)$$

Primjer mehaničkog sustava invarijantnog na translacije u vremenu je harmonički oscilator. Rješenje jednadžbe gibanja je oscilatorna funkcija

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \Longrightarrow x(t) = A\cos(\omega t + \phi). \qquad (1.18)$$

Lako se možemo uvjeriti da pomakom vremenskog ishodišta za s rješenje zadržava isti oblik

$$x(t+s) = A\cos(\omega t + \omega s + \phi) = A\cos(\omega t + \phi'), \quad \phi' = \omega s + \phi. \qquad (1.19)$$

Ukoliko na materijalnu točku djeluje sila koja eksplicitno ovisi o vremenu, sustav općenito neće biti invarijantan na translacije u vremenu. Kao primjer, promotrimo sljedeću jednadžbu gibanja

$$m\ddot{x} = f\cos\omega t \Longrightarrow x(t) = -\frac{f}{m\omega^2}\cos[\omega(t+s)] + v_0 t + x_0. \qquad (1.20)$$

Pomakom vremenskog ishodišta rješenje mijenja oblik

$$x(t+s) = -\frac{f}{m\omega^2}\cos\omega t\cos\omega s + -\frac{f}{m\omega^2}\sin\omega t\sin\omega s + v_0 t + v_0 s + x_0. \qquad (1.21)$$

Razlog je vremenski ovisna sila koja djeluje na sustav. Sustavi u kojima $\vec{\mathcal{F}}$ ne ovisi eksplicitno o vremenu zovu se još i *autonomni* sustavi.

Invarijantnost na translaciju u prostoru

Promjena prostornog ishodišta $\vec{x}_i \to \vec{x}'_i = \vec{x}_i + \vec{s}$ također spada u Galileievu grupu transformacija. Invarijantnost s obzirom na translacije u prostoru znači da je prostor homogen, odnosno da ima iste osobine u svim točkama. Ukoliko je gibanje mehaničkog sustava od n materijalnih točaka dano putanjom $\vec{x}_i(t), \quad i = 1,\ldots,n$, tada za bilo koji vektor $\vec{s} \in \mathbb{L}^3$ putanja $\vec{x}'_i(t) = \vec{x}_i(t) + \vec{s}$ također predstavlja rješenje Newtonove jednadžbe gibanja. Jednažba gibanja u transformiranom sustavu

$$\ddot{\vec{x}}'_i = \vec{f}_i(\vec{x}'_1,\ldots,\vec{x}'_n,\dot{\vec{x}}'_1,\ldots,\dot{\vec{x}}'_n). \qquad (1.22)$$

Uvrstimo transformacije

$$\vec{x}'_i(t) = \vec{x}_i(t) + \vec{s}, \quad \dot{\vec{x}}'_i(t) = \dot{\vec{x}}_i(t), \qquad (1.23)$$

i dolazimo do jednadžbe

$$\ddot{\vec{x}}_i = \vec{f}_i(\vec{x}_1 + \vec{s},\ldots,\vec{x}_n + \vec{s},\dot{\vec{x}}_1,\ldots,\dot{\vec{x}}_n). \qquad (1.24)$$

Da bi oblik jednadžbe ostao nepromijenjen, desna strana može ovisiti samo o relativnim položajima materijalnih točaka

$$\vec{f}_i(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n,\dot{\vec{x}}_1,\ldots,\dot{\vec{x}}_n) = \vec{f}_i(\vec{x}_j - \vec{x}_k,\dot{\vec{x}}_1,\ldots,\dot{\vec{x}}_n). \qquad (1.25)$$

Najjednostavniji primjer je gravitacijska sila među česticama. Kako god translatirali ishodište koordinatnog sustava, gravitacijska sila između Sunca i Zemlje ostaje jednaka.

Invarijantnost na Galileievu transformaciju

Neka se dva sustava gibaju jedan u odnosu na drugi jednoliko po pravcu konstantnom brzinom $\vec{v}$

$$\vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t, \qquad (1.26)$$

Izračunamo li odgovarajuće brzine i ubrzanja

$$\dot{\vec{x}}' = \dot{\vec{x}} + \vec{v}, \quad \text{i} \quad \ddot{\vec{x}}' = \ddot{\vec{x}}, \qquad (1.27)$$

Newtonova jednadžba prelazi u

$$\ddot{\vec{x}}_i = \vec{f}_i(\vec{x}_1 + \vec{v}t, \ldots, \vec{x}_n + \vec{v}t, \dot{\vec{x}}_1 + \vec{v}, \ldots, \dot{\vec{x}}_n + \vec{v}). \quad (1.28)$$

Već smo zaključili da desna strana može ovisiti samo o relativnim položajima materijalnih točaka pa prethodnu jednadžbu možemo pojednostaviti

$$\ddot{\vec{x}}_i = \vec{f}_i(\vec{x}_j - \vec{x}_k, \dot{\vec{x}}_1 + \vec{v}, \ldots, \dot{\vec{x}}_n + \vec{v}), \quad k, j = 1, \ldots, n. \quad (1.29)$$

Da bi Newtonova jednadžba bila invarijantna na Galilejeve transformacije, desna strana može ovisiti samo o relativnim brzinama materijalnih točaka

$$\ddot{\vec{x}}_i = \vec{f}_i(\vec{x}_j - \vec{x}_k, \dot{\vec{x}}_j - \dot{\vec{x}}_k), \quad k, j = 1, \ldots, n. \quad (1.30)$$

Invarijantnost na rotacije u prostoru

Promatramo dva koordinatna sustava sa zajedničkim ishodištem čije su osi međusobno rotirane. Vektori položaja u dva sustava vezani su matricom ortogonalne transformacije $\vec{x}'_i = G\vec{x}_i$. Newtonova jednadžba poprima sljedeći oblik

$$G\ddot{\vec{x}}_i = \vec{f}_i(G\vec{x}_j, G\dot{\vec{x}}_j). \quad (1.31)$$

Pomnožimo lijevu i desnu stranu inverznom matricom G^{-1}

$$\ddot{\vec{x}}_i = G^{-1}\vec{f}_i(G\vec{x}_j, G\dot{\vec{x}}_j). \quad (1.32)$$

Prethodna jednadžba mora imati istu formu kao i $\ddot{\vec{x}}_i = \vec{f}_i(\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i)$, tj. mora vrijediti

$$\vec{f}_i(G\vec{x}_j, G\dot{\vec{x}}_j) = G\vec{f}_i(\vec{x}_j, \dot{\vec{x}}_j). \quad (1.33)$$

Možemo zaključiti da se $\vec{f}_i$ transformira kao vektor.

1.5.1 Prvi Newtonov zakon

Svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu sve dok ga sila ne prisili da to stanje promijeni.

Prvi Newtonov zakon direktna je posljedica Galileievog aksioma o relativnosti inercijalnih sustava, a možemo ga izvesti primjenjujući zahtjeve invarijantnosti na sustav s jednom materijalnom točkom.

1. Invarijantnost na translaciju u vremenu povlači da sila ne ovisi eksplicitno o vremenu

$$\vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}). \quad (1.34)$$

2. Invarijantnost na translaciju u prostoru povlači da sila može ovisiti samo relativnom položaju čestica. Budući da se radi samo o jednoj čestici, slijedi da sila uopće ne može ovisiti o položaju čestice
$$\vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \vec{f}(\dot{\vec{x}}). \tag{1.35}$$

3. Invarijantnost na Galilejeve transformacije povlači da sila može ovisiti samo o relativnoj brzini čestica. Kao i u prethodnoj točci, slijedi da sila uopće ne može ovisiti o brzini čestice
$$\vec{f}(\dot{\vec{x}}) = \vec{f}. \tag{1.36}$$
Dakle, sila je konstantni vektor.

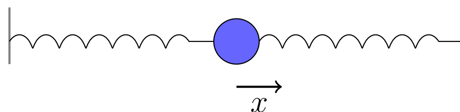
4. Invarijantnost na ortogonalne transformacije daje uvjet $G\vec{f} = \vec{f}$ koji u slučaju konstantnog vektora može biti ispunjen samo ako je $\vec{f} = 0$.

Od Newtonove jednadžbe preostaje $\ddot{\vec{x}} = 0$. Dakle, čestica ili miruje ili se jednoliko giba po pravcu $\vec{x} = \vec{v}_0 t + \vec{x}_0$.

1.6 Troma masa i sila

1.6.1 Troma masa

Napišimo Newtonove jednadžbe kao sustav vezanih diferencijalnih jednadžbi za n tijela,
$$\ddot{\vec{x}}_i = \vec{\mathcal{F}}_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.37}$$
u kojem vektorske funkcije $\vec{\mathcal{F}}_i$ općenito sadrže ovisnosti o svih n tijela. Već smo ranije tijela identificirali kao materijalne točke, no dosada nismo uveli nikakvo svojstvo tj. parametar, kojim bismo karakterizirali "materijalnost" tijela. Temeljni parametar kojim u mehanici pridružujemo konkretno mjerljivo svojstvo je **masa**, pobliže **troma** ili **inercijalna** masa. Masa se u prikazima Klasične mehanike vrlo često uvodi kao datost, analogno ranije uvedenim konceptima vremena i prostora. Postupak koji ćemo ovdje koristiti osniva se u velikoj mjeri na fenomenologiji. Pri uvođenju mase ćemo kao i



Slika 1.4: Kuglica povezana s dvije opruge za nepomične zidove.

ranije, kombinirati opažanja i aksiomatsko poopćavanje na univerzalnu karakterizaciju materijalnih sustava. Štoviše, ovdje ćemo se osloniti na opis opažanja u konkretnom mehaničkom sustavu, i pri tome imati na umu da taj izbor ima prije svega ilustrativnu svrhu, budući da njime samo simboliziramo raznovrsna, opažanjem nakupljena, šira iskustva. Ta opažanja, uključujući i ona koja ćemo ovdje pratiti, nisu ograničena samo na Galilei-eve afine sustave, već i na one koji, najčešće zbog prisutnih ograničenja na gibanja, nisu afini. Međutim, kao što je već spomenuto ranije, Newtonov determinizam i pripadne jednadžbe gibanja su općeniti, odnosno vrijede i za takve sustave.

Sustav, prikazan na sl. 1.4, sastoji se od opruge horizontalno postavljene između dvaju nepomičnih zidova. Na oprugu je pričvršćena posudica u koju možemo staviti neku iz niza kuglica $(1, 2, \dots)$ koje imamo na raspolaganju. Opruge također možemo mijenjati, a različite opruge ćemo označiti s a, b,.... Aksiomatsko uvođenje trome mase ćemo temeljiti na opažanjima gibanja zdjelice s kuglicom uz razne kombinacije kuglica i opruga. Svako opažanje započinjemo pomicanjem zdjelice s kuglicom iz položaja ravnoteže $x = 0$[14].

Opažanje I: U velikom području ostvarivih, i ne suviše velikih pomaka[15] uočavamo da sustav izvodi harmoničke oscilacije,

$$x(t) = x_0 \cos \alpha(t - t_0), \tag{1.38}$$

s maksimalnim pomakom[16] x_0 i frekvencijom α koja je neovisna o iznosu početnog pomaka x_0. Pripadna perioda, interval između dva uzastopna prolaska kroz istu točku obrata, iznosi

$$T = \frac{2\pi}{\alpha}. \tag{1.39}$$

Iz *Opažanja I* izravno zaključujemo da pripadna Newtonova jednadžba glasi

$$\ddot{x} = -\alpha^2 x. \tag{1.40}$$

Radi se dakle o harmoničkom oscilatoru[17]. U ovom razmatranju ćemo upotrijebiti harmonički oscilator kao sustav kod kojeg nizom mjerenja želimo odgovoriti na sljedeće pitanje:

[14]Ovakav "mjerni instrument" sadrži niz ograničenja, i stoga nema osobine Galilei-evog prostora. Gibanje je ograničeno na jedan od dva horizontalna smjera. Zabrana gibanja u vertikalnom smjeru isključuje djelovanje gravitacijskog polja Zemlje na kuglice koje ćemo uskoro razmatrati. Ishodište na osi gibanja, $x = 0$, nije slobodno izabrano, nego se podudara s ravnotežnim položajem zdjelice. Uvođenje nepomičnih zidova uništilo je homogenost prostora, a na gibanje kuglice je također nametnuto ograničenje jer se položaj kuglice podudara s položajem zdjelice. Jedino što je sačuvano od afinosti je homogenost vremena.

[15]Ostvarivi su samo oni pomaci koje dozvoljavaju nepomični zidovi, a pomak ne smije biti prevelik kako ne bismo izašli iz elastičnog režima opruge.

[16]Amplituda ili točka obrata

[17]Svojstva harmoničkog oscilatora iscrpno ćemo analizirati u okviru kolegija Klasična mehanika II.

- **Kakva je uloga tijela (ovdje kuglice), a kakva njegove okoline tj. ostatka mehaničkog sustava (ovdje opruge sa zdjelicom), u ovakvom gibanju?**

Opažanje II: Da bismo se približili odgovoru, uzmimo dva različita tijela (kuglice i i j) i pratimo kako se svaka od njih giba na nizu različitih opruga a, b, c,.... Opažanjem bismo ustanovili da omjer perioda titranja kuglica i i j ovisi o izboru kuglica, ali ne i o izboru opruga. Uzimajući u obzir jedn. (1.39), ovo opažanje vodi na jednakost

$$\frac{T_{i,a}}{T_{j,a}} = \frac{\alpha_{j,a}}{\alpha_{i,a}} = \frac{T_{i,b}}{T_{j,b}} = \frac{\alpha_{j,b}}{\alpha_{i,b}} = \cdots , \tag{1.41}$$

za bilo koji par kuglica (i, j) i za bilo koji niz opruga a, b,....

Reinterpretirajmo sada *Opažanje II* povezujući omjere (1.41) s omjerima ubrzanja kuglica. Naime, za dvije kuglice s putanjama istih amplituda,

$$x_{i,a,0} = x_{j,a,0} \equiv x_{a,0}, \tag{1.42}$$

ubrzanja u točkama maksimalnog pomaka su dana izrazima

$$\ddot{x}_{i,a,0} = -\alpha_{i,a}^2 x_{a,0}, \quad \ddot{x}_{j,a,0} = -\alpha_{j,a}^2 x_{a,0}, \tag{1.43}$$

tako da je njihov omjer povezan s omjerom perioda,

$$\frac{\ddot{x}_{i,a,0}}{\ddot{x}_{j,a,0}} = \frac{\alpha_{i,a,0}^2}{\alpha_{j,a,0}^2} = \frac{T_{j,a,0}^2}{T_{i,a,0}^2}. \tag{1.44}$$

Omjer ubrzanja kuglica i i j ovisi samo o izboru kuglica, a ne ovisi o izboru opruge. Drugim riječima omjer ubrzanja kuglica (1.44) ne ovisi o okolini koja utječe na njihovo gibanje. Taj je omjer dakle omjer inherentnog svojstva tih dvaju tijela.

Dolazimo do sljedećeg zaključka:

- Bilo koja dva tijela karakterizira **mjerljivi** omjer svojstava koja se manifestiraju **samo** kada ta tijela imaju konačna ubrzanja. Definiramo ga kao omjer recipročnih **tromih (inercijalnih) masa** dvaju tijela

$$\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_j} \equiv \frac{m_j}{m_i}. \tag{1.45}$$

Uvrštavajući tu definiciju u jedn. (1.44), dolazimo do jednakosti

$$m_i \alpha_{i,a}^2 = m_j \alpha_{j,a}^2, \tag{1.46}$$

iz koje slijedi da umnožak $m\alpha^2$ ne ovisi o masama kuglica, već je isključivo svojstvo opruge, definirano parametrom[18]

$$k \equiv m\alpha^2. \tag{1.47}$$

Uz ovakvu faktorizaciju polazna jednadžba gibanja (1.40) za sustav opruga i kuglica ima oblik

$$m\ddot{x} = -kx. \tag{1.48}$$

Opažanje II izravno slijedi iz te jednadžbe. Uvođenjem konstante elastičnosti opruge ugradili smo fenomenološka opažanja u samu jednadžbu gibanja. Analogni postupak u kojem bismo pratili gibanje tijela i, j,... u nekoj drugoj okolini[19] bi nas doveo do zaključaka kojima bismo opet utvrdili da omjeri ubrzanja bilo koja dva tijela ne ovise o okolini u kojoj se tijela nalaze te bi oni bili jednako valjana podloga za definicijsko uvođenje omjera tromih masa.

Kao što je vidljivo iz prethodnih razmatranja, opisana opažanja omogućuju nam uvođenje samo omjera tromih masa dvaju tijela, ali ne i apsolutne mase pojedinog tijela. Isti zaključak bi vrijedio i za bilo koja druga dostupna opažanja. Nadalje, omjer tromih masa bilo koja dva tijela je pozitivan, odnosno predznak trome mase jednak je za sva tijela[20]. Prema konvenciji, bira se da je troma masa pozitivna.

Troma masa je, uz vrijeme i duljinu, treća temeljna mehanička dimenzija. Pripadna jedinica mase u SI sustavu je 1kg[21]. Preko tako izabranog etalona izražavamo kvantitativne iznose svih drugih tromih masa.

1.6.2 Sila

Analiza sustava kuglica i opruga[22] omogućila nam je faktorizaciju (1.48), kojom smo faktor k pripisali okolini, a faktor m tijelu. Taj postupak moŽemo poopćiti na proizvoljan sustav n tijela uvodeći u pripadne Newtonove jednadžbe (1.37) trome mase tijela. Nakon uvođenja definicije

$$\vec{\mathcal{F}}_i \equiv \frac{\vec{F}_i}{m_i}, \tag{1.49}$$

sustav jedn. (1.37) poprima oblik

$$m_i\ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i. \tag{1.50}$$

[18] Parametar k se naziva konstantom elastičnosti opruge

[19] Za sada izuzimamo okoline koje su u gravitacijskom međudjelovanju s tijelom, o čemu će biti riječi nešto kasnije u kursu.

[20] Za razliku od električnog naboja koji može imati pozitivan i negativan predznak.

[21] po definiciji 1kg odgovara masi 1 dm^3 kemijski čiste vode kod 4^{0}C.

[22] Ili bilo kojeg drugog analognog sustava

Vektorske veličine $\vec{F}_i$ nazivaju se silama. Pobliže, $\vec{F}_i$ je bf sila kojom okolina (uključujući i ostala tijela) djeluje na i-to tijelo. Iz jedn. (1.49) vidljivo je da vektorska veličina $\vec{\mathcal{F}}_i$ predstavlja silu po jedinici mase tijela i.

1.6.3 Dodatne napomene

U primjeru sustava opruga i kuglica, faktorizacijom (1.48) smo uveli konstantu elastičnosti koja u potpunosti parametrizira vanjsku elastičnu silu. Ta sila ne ovisi ni o tromoj mase m, niti o bilo kojem drugom fizičkom svojstvu tijela na koje djeluje. Važno je istaknuti da takva puna separacija okoline i tijela općenito ne mora biti ispunjena, i da su u fizici jednako česti sustavi u kojima sila okoline ovisi i o nekom svojstvu tijela na kojeg okolina djeluje. Primjerice, elektrostatska sila ovisi o električnom naboju tijela na koje djeluje.

Konačni, najvažniji primjer u mehanici je gravitacijska sila. Kao što ćemo ubrzo vidjeti, onda je proporcionalna tromoj masi tijela na koje djeluje, što ima bitne posljedice, ne samo u okviru Newtonove mehanike, već i u širim okvirima cjelokupne fizike i njenog povjesnog razvoja.

2 Zakoni sačuvanja

2.1 Sile među česticama

2.1.1 Treći Newtonov zakon

Treći Newtonov zakon (zakon djelovanja i protudjelovanja) glasi: dva tijela međusobno djeluju jedno na drugo silama jednakog iznosa, ali suprotnog smjera. Ako je $\vec{F}_{ij}$ sila kojom j-ta čestica djeluje na i-tu česticu, a $\vec{F}_{ji}$ sila kojom i-ta čestica djeluje na j-tu česticu

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \tag{2.1}$$

Sile za koje vrijedi treći Newtonov zakon zovemo sile međudjelovanja. Za njih vrijedi i princip superpozicije: sila na svaku pojedinu česticu je vektorski zbroj sila od svih preostalih čestica. Poseban slučaj predstavljaju centralne sile koje leže na spojnici čestica. Definiramo jedinični vektor $\vec{e}_{ij}$ tako da leži na spojnici čestica i i j, a ima smjer od čestice i prema čestici j. Silu među česticama možemo napisati u obliku

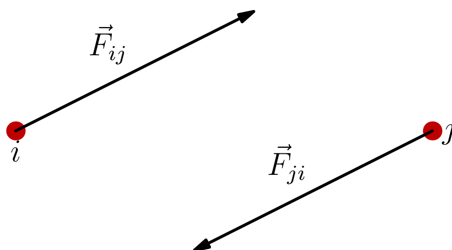
$$\vec{F}_{ij} = f_{ij}\vec{e}_{ij} \quad \text{i} \quad \vec{F}_{ji} = f_{ji}\vec{e}_{ji}, \tag{2.2}$$

pri čemu vrijedi $f_{ij} = f_{ji}$.

2.1.2 Zatvoreni sustav

Označimo s $\vec{F}_i$ ukupnu silu na i-tu česticu

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1 (j\neq i)}^{n} \vec{F}_{ij}. \tag{2.3}$$



Slika 2.1: j-ta čestica djeluje na i-tu česticu silom $\vec{F}_{ij}$, dok i-ta čestica djeluje na j-tu silom $\vec{F}_{ji}$. Pritom vrijedi $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$.



Slika 2.2: Jedinični vektor $\vec{e}_{ij}$ leži na spojnici čestica i i j, a ima smjer od čestice i prema čestici j. Čestice međudjeluju centralnom silom. Vektor sile leži na spojnici čestica.

Ako su u prethodnu sumu uključene sve čestice u inercijalnom sustavu, tada sustav zovemo zatvorenim. Najčešće sustav dijelimo na podsustave I i II, a silu na i-tu česticu rastavljamo na dva doprinosa

$$\vec{F}_i = \sum_{j \in I (j \neq i)} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i'. \tag{2.4}$$

Prvi doprinos potječe od čestica iz podsustava I, dok ukupni doprinos podsustava II zovemo vanjska sila.

2.2 Količina gibanja

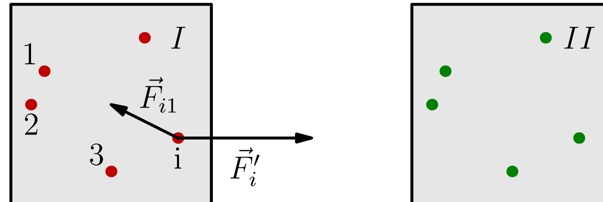
2.2.1 Sačuvanje količine gibanja

Količinu gibanja sustava od n čestica definiramo kao sumu količina gibanja svih pojedinih čestica

$$\vec{P} \equiv \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i. \tag{2.5}$$

Vremenska promjena ukupne količine gibanja glasi

$$\dot{\vec{P}} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i. \tag{2.6}$$



Slika 2.3: Sustav smo podijelili na dva podsustava. Ukupnu silu na i-tu česticu u podsustavu I možemo rastaviti na doprinose ostalih čestica u tom podsustavu i ukupnu silu koja potječe od vcestica iz podsustava II. Takvu silu zovemo vanjska sila.

Uvrstimo Newtonovu jednadžbu gibanja

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \Longrightarrow \dot{\vec{P}} = \sum_i \vec{F}_i. \tag{2.7}$$

Silu na i-tu česticu možemo rastaviti na sumu vanjske sile $\vec{F}_i'$ i silu međudjelovanja s ostalim česticama

$$\dot{\vec{P}} = \sum_i \left[\vec{F}_i' + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}\right]. \tag{2.8}$$

Indekse u desnoj sumi možemo zamijeniti bez promjene rezultata

$$\sum_{i,j(i\neq j)} \vec{F}_{ij} = \sum_{i,j(i\neq j)} \vec{F}_{ji} \Longrightarrow \sum_{i,j(i\neq j)} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j(i\neq j)} \left[\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}\right]. \tag{2.9}$$

Uz pretpostavku da vrijedi treći Newtonov zakon

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0, \tag{2.10}$$

vremenska promjena količine gibanja sistema jednaka je zbroju vanjskih sila koje djeluju na sistem. Ukupna količina gibanja zatvorenog sistema je sačuvana

$$\dot{\vec{P}} = 0. \tag{2.11}$$

2.2.2 Centar mase sustava

Centar mase sistema n čestica definiramo na sljedeći način

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{2.12}$$

Možemo pokazati da definicija centra mase ne ovisi o izboru ishodišta koordinatnog sustava. Pretpostavimo da smo koordinatni sustav translatirali za konstantni vektor $\vec{l}$

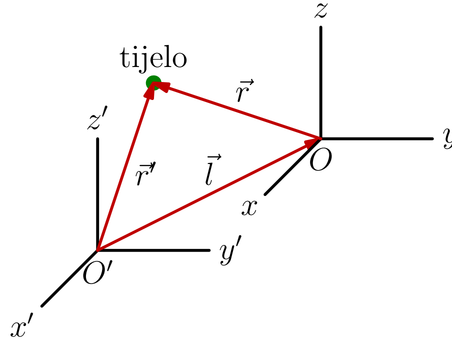
$$\vec{r}_{cm}' = \frac{\sum m_i\vec{r}_i'}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i(\vec{r}_i + \vec{l})}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i} + \vec{l}. \tag{2.13}$$

Položaj centra mase sustava u translatiranom sustavu glasi

$$\vec{r}_{cm}' = \vec{r}_{cm} + \vec{l}. \tag{2.14}$$

Centar mase tijela je uvijek na istom mjestu u tijelu, bez obzira na ishodište koordinatnog sustava. Količina gibanja sustava

$$\vec{P} = \sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right) = \sum_i m_i\frac{d}{dt}\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{2.15}$$



Slika 2.4: Centar mase tijela se uvijek nalazi u istoj točki tijela bez obzira na izbor ishodišta koordinatnog sustava.

Prepoznamo definiciju položaja centra mase

$$\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_{cm} \Longrightarrow \dot{\vec{P}} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_{cm}, \tag{2.16}$$

a zatim iskoristimo jednadžbu gibanja

$$\dot{\vec{P}} = \sum_i \vec{F}_i' \Longrightarrow \left(\sum_i m_i\right) \ddot{\vec{r}}_{cm} = \sum_i \vec{F}_i'. \tag{2.17}$$

Centar mase tijela giba se kao da je sva masa tijela koncentrirana u njemu. Ako na tijelo ne djeluju vanjske sile centar mase tijela giba se jednoliko po pravcu.

2.3 Moment količine gibanja

Moment količine gibanja čestice mase m s obzirom na točku O definiran je relacijom

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}. \tag{2.18}$$

Moment količine gibanja za sustav od n čestica definiramo kao sumu momenata količine gibanja svih pojedinih čestica

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i. \tag{2.19}$$

Vremenska promjena ukupnog momenta količine gibanja

$$\dot{\vec{M}} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times m\dot{\vec{r}}_i}_{0} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i. \tag{2.20}$$

Doprinos lijevog član propada jer vrijedi $\vec{a} \times \vec{a} = 0$. Uvrstimo Newtonovu jednadžbu gibanja

$$\dot{\vec{M}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \tag{2.21}$$

a zatim silu na i-tu česticu rastavimo na vanjsku silu i silu međudjelovanja s ostalim česticama

$$\dot{\vec{M}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \left[\sum_{j=1 \neq i}^{n} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i' \right]. \tag{2.22}$$

Oznaku indeksa sumacije možemo zamijeniti bez promjene rezultata

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \left[\sum_{j=1 \neq i}^{n} \vec{F}_{ij} \right] = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \left[\sum_{i=1 \neq j}^{n} \vec{F}_{ji} \right]. \tag{2.23}$$

Stoga vrijedi

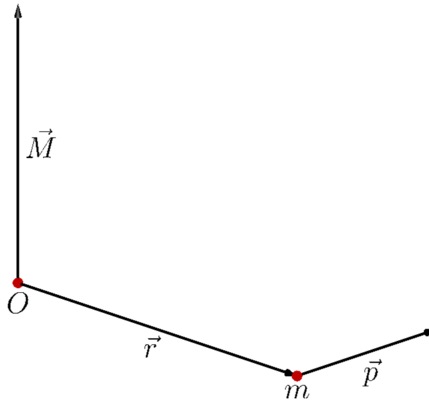
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \left[\sum_{j=1 \neq i}^{n} \vec{F}_{ij} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1 \neq i}^{n} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right]. \tag{2.24}$$

Sada pretpostavimo da vrijedi zakon djelovanja i protudjelovanja

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \left[\sum_{j=1 \neq i}^{n} \vec{F}_{ij} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1 \neq i}^{n} [\vec{r}_i - \vec{r}_j] \times \vec{F}_{ij}, \tag{2.25}$$

kao i da su sile među česticama usmjerene duž spojnice dviju čestica

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j \parallel \vec{F}_{ij} \Longrightarrow [\vec{r}_i - \vec{r}_j] \times \vec{F}_{ij} = 0. \tag{2.26}$$



Slika 2.5: Vektori položaja ($\vec{r}$) i impulsa ($\vec{p}$) potrebni za definiciju momenta količine gibanja.

Vremenska promjena momenta količine gibanja (2.21) svodi se na

$$\dot{\vec{M}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i'. \tag{2.27}$$

Definiramo moment sile s obzirom na točku O

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{2.28}$$

Dakle, uz pretpostavku da su sile međudjelovanja centralne, vremenska promjena momenta količine gibanja jednaka je zbroju momenata vanjskih sila

$$\dot{\vec{M}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i' \equiv \vec{N}'. \tag{2.29}$$

Ako je sistem zatvoren (vanjska sila je nula), moment količine gibanja je sačuvan s obzirom na bilo koju točku O.

Primjer 2.1

Moment količine gibanja čestice dan je izrazom

$$\vec{M} = 6t^2\vec{i} - (2t+1)\vec{j} + (12t^3 - 8t^2)\vec{k}.$$

Nađite moment sile u trenutku $t = 1$.

Vremenska promjena momenta količine gibanja jednaka je momentu sile

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{N}. \tag{2.30}$$

Deriviramo moment količine gibanja po vremenu

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 12t\vec{i} - 2\vec{j} + 4(9t^2 - 4t)\vec{k}, \tag{2.31}$$

i zatim uvrstimo $t = 1$

$$\vec{N}(t=1) = 12\vec{i} - 2\vec{j} + 20\vec{k}. \tag{2.32}$$

Primjer 2.2

Čestica mase m giba se po krivulji u prostoru definiranoj jednadžbom

$$\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}.$$

Izračunajte moment sile i moment količine gibanja s obzirom na ishodište. Provjerite relaciju $\dot{\vec{M}} = \vec{N}$.

Prvo izračunamo brzinu čestice

$$\dot{\vec{r}} = -a\omega\sin\omega t\vec{i} + b\omega\cos\omega t\vec{j}. \tag{2.33}$$

Moment količine gibanja čestice je konstantan

$$\vec{M} = \vec{r}\times m\dot{\vec{r}} = m\left[a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}\right]\times\left[-a\omega\sin\omega t\vec{i} + b\omega\cos\omega t\vec{j}\right] \tag{2.34}$$

$$\vec{M} = mab\omega\left[\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right]\vec{k} = mab\omega\vec{k}. \tag{2.35}$$

Da bi izračunali moment sile, prvo moramo izračunati silu koja djeluje na česticu. Da bi se čestica gibala po putanji $\vec{r}(t)$ na nju mora djelovati sila

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \tag{2.36}$$

Izračunamo akceleraciju čestice

$$\ddot{\vec{r}} = -a\omega^2\cos\omega t\vec{i} - b\omega^2\sin\omega t\vec{j} = -\omega^2\left[a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}\right] = -\omega^2\vec{r}, \tag{2.37}$$

a zatim i silu koja na nju djeluje

$$\vec{F} = m\ddot{r} = -m\omega^2\vec{r}. \tag{2.38}$$

Sila je proporcionalna radijus-vektoru čestice pa je moment sile jednak nuli

$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}\times\vec{r} = 0, \tag{2.39}$$

Moment količine gibanja je konstanta u skladu s relacijom $\dot{\vec{M}} = \vec{N}$.

2.4 Energija

2.4.1 Pojam rada

Promatramo česticu mase m na koju djeluje sila $\vec{F}$. Ako se čestica pomakne iz točke $\vec{r}$ do točke $\vec{r}+d\vec{r}$, na njoj je izvršen rad

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{2.40}$$

Pomak $d\vec{r}$ je infinitezimalan pa je sila u izrazu (2.40) približno konstantna. Rad na cijeloj putanji od točke A do točke B izračunamo tako da putanju podijelimo na infinitezimalne dijelove i zatim zbrojimo doprinose svih dijelova. Rad na zadanoj putanji C od točke A do točke B sveo se na linijski integral

$$W_{AB} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{2.41}$$

Ograničimo se sada na ostvarivu putanju tj. putanju na kojoj vrijedi drugi Newtonov zakon

$$W_{AB} = \int_A^B m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r}. \tag{2.42}$$

Iskoristimo definiciju brzine

$$d\vec{r} = \dot{\vec{r}}dt \Longrightarrow W_{AB} = m\int_A^B \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}dt = \frac{m}{2}\int_A^B \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\right)^2 dt, \tag{2.43}$$

a potom integriramo zadnji izraz

$$W_{AB} = \frac{m}{2}\left[\dot{\vec{r}}^2(B) - \dot{\vec{r}}^2(A)\right]. \tag{2.44}$$

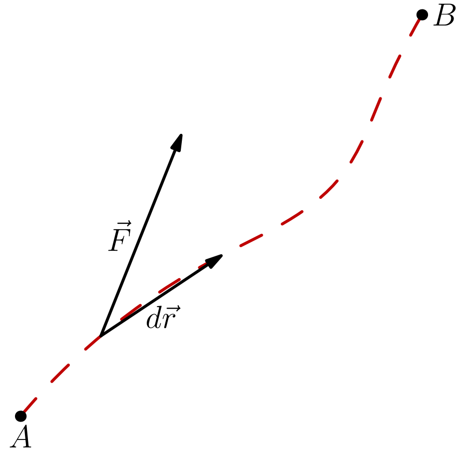
Definiramo kinetičku energiju čestice

$$T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2. \tag{2.45}$$

Rad izvršen na čestici dok se gibala od točke A do točke B po ostvarivoj putanji jednak je razlici kinetičkih energija četice u konačnoj i početnoj točki putanje

$$W_{AB} = T(B) - T(A). \tag{2.46}$$

Cijelo razmatranje možemo proširiti na sistem n čestica koji se giba od konfiguracije $\{A\}$: $(\vec{r}_1(A), \ldots, \vec{r}_n(A))$ do konfiguracije $\{B\}$: $(\vec{r}_1(B), \ldots, \vec{r}_n(B))$ po ostvarivoj putanji. Na



Slika 2.6: Rad na infinitezimalnom putu iznosi $W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

česticama je izvršen rad

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \sum_i \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \int_A^B m\ddot{\vec{r}}_i \cdot d\vec{r}_i \\ &= \sum_i \int_A^B m\ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i dt = \frac{1}{2} \sum_i m_i \int_A^B \frac{d}{dt} \left[\dot{\vec{r}}_i\right]^2 dt. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Integriranjem dolazimo do izraza

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \sum_i \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{r}}_i(B)\right]^2 - \sum_i \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{r}}_i(A)\right]^2 \\ &= \sum_i T_B(i) - \sum_i T_A(i) = T_B - T_A. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Zbroj radova na svim česticama jednak je promjeni ukupne kinetičke energije.

Primjer 2.3

Čestica mase 4 giba se po krivulji u prostoru

$$\vec{r}(t) = (3t^2 - 2t)\vec{i} + t^3\vec{j} - t^4\vec{k}$$

u polju sile $\vec{F}$. Nađite rad sile $\vec{F}$ da bi se čestica pomakla iz točke $t_A = 1$ do točke $t_B = 2$. Pokažite da je rad jednak razlici kinetičkih energija u točkama $t_B = 2$ i $t_A = 1$.

Da bi se čestica gibala po putanji $\vec{r}(t)$, na nju mora djelovati sila

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = m\left(6\vec{i} + 6t\vec{j} - 12t^2\vec{k}\right) = 24\vec{i} + 24t\vec{j} - 48t^2\vec{k}. \tag{2.49}$$

Pri pomicanju iz točke A u točku B na čestici je izvršen rad

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{2.50}$$

Diferencijal radijus-vektora točke koja se nalazi na zadanoj putanji glasi

$$d\vec{r} = \dot{\vec{r}}dt = (6t - 2)dt\vec{i} + 3t^2dt\vec{j} - 4t^3dt\vec{k}. \tag{2.51}$$

Izračunamo skalarni produkt sile $\vec{F}$ i diferencijala $d\vec{r}$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = 6m\left[\vec{i} + t\vec{j} - 2t^2\vec{k}\right] \cdot \left[(6t - 2)dt\vec{i} + 3t^2dt\vec{j} - 4t^3dt\vec{k}\right] \tag{2.52}$$

$$= 6m\left[(6t - 2)dt + 3t^3dt + 8t^5dt\right]. \tag{2.53}$$

Integriramo izraz (2.50), uzimajući u obzir da je donja granica integracije $t_A = 1$, a gornja $t_B = 2$

$$W_{AB} = 24\int_{t=1}^{t=2} \left[(6t - 2) + 3t^3 + 8t^5\right] dt \tag{2.54}$$

$$W_{AB} = 24\left[3t^2 - 2t + \frac{3}{4}t^4 + \frac{4}{3}t^6\right]\Bigg|_{t=1}^{t=2} \tag{2.55}$$

$$W_{AB} = 24\left[3t^2 - 2t + \frac{3}{4}t^4 + \frac{4}{3}t^6\right]\Bigg|_{t=1}^{t=2} \tag{2.56}$$

$$W_{AB} = \left[72t^2 - 48t + 18t^4 + 32t^6\right]\Big|_{t=1}^{t=2} \tag{2.57}$$

$$W_{AB} = \left[72t^2 - 48t + 18t^4 + 32t^6\right] - [72 - 48 + 18 + 32] \tag{2.58}$$

$$W_{AB} = 2528 - 74 = 2454. \tag{2.59}$$

Isti rezultat možemo dobiti tako da izračunamo razliku kinetičkih energija u konačnoj i početnoj točki. Kinetička energija u početnoj točki

$$T(A) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2(t_A) = \frac{1}{2} m \left[(6t-2)^2 + 9t^4 + 16t^6 \right] \Big|_{t=1} = 82. \tag{2.60}$$

Kinetička energija u konačnoj točki

$$T(B) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2(t_B) = \frac{1}{2} m \left[(6t-2)^2 + 9t^4 + 16t^6 \right] \Big|_{t=2} = 2536. \tag{2.61}$$

Razlika kinetičkih energija

$$T(B) - T(A) = 2536 - 82 = 2454, \tag{2.62}$$

jednaka je radu izvršenom na čestici.

Primjer 2.4

Izračunajte rad izvršen na čestici koja se giba po kružnici radijusa 3 smještenoj u ravnini xy sa središtem u ishodištu, ako na česticu djeluje sila

$$\vec{F} = (2x - y + z)\vec{i} + (x + y - z^2)\vec{j} + (3x + 2y + 4z)\vec{k}.$$

Gibanje se odvija u xy ravnini pa vrijedi $z = 0$

$$\vec{F} = (2x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + (3x + 2y)\vec{k}. \tag{2.63}$$

Točku na kružnici možemo definirati koristeći kut t kao parametar. Radijus-vektor takve točke glasi

$$\vec{r} = 3\cos t\vec{i} + 3\sin t\vec{j}. \tag{2.64}$$

Tražimo rad izvršen dok čestica prijeđe jedan krug

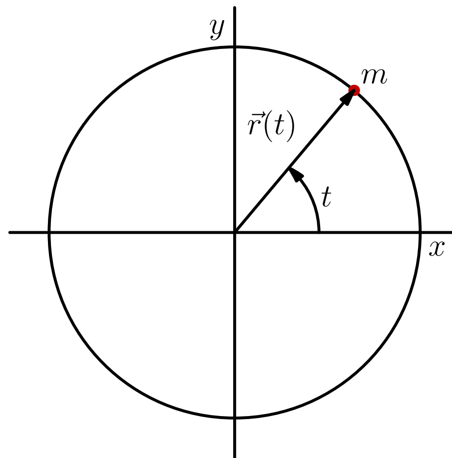
$$W = \int_0^{2\pi} \vec{F}(t) \cdot d\vec{r}(t). \tag{2.65}$$

Diferencijal radijus-vektora

$$d\vec{r} = -3\sin t dt\vec{i} + 3\cos t dt\vec{j}. \tag{2.66}$$

Izračunamo skalarni produkt sile i diferencijala $d\vec{r}$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \left[(2x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + (3x + 2y)\vec{k}\right] \cdot \left[-3\sin t\vec{i} + 3\cos t\vec{j}\right] dt \tag{2.67}$$



Slika 2.7: Koordinate čestice koja se giba po kružnici radijusa R: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$.

Izračunamo skalarni produkt

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{9}{2} \sin 2t dt + 9dt. \tag{2.68}$$

Uvrstimo vrijednost skalarnog produkta u integral (2.65)

$$W = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{9}{2} \sin 2t + 9 \right] dt = 18\pi. \tag{2.69}$$

2.4.2 Konzervativni sistem jedne čestice

Ako rad izvršen na čestici tijekom gibanja od točke A do točke B ovisi samo o krajnjim točkama putanje (ne i o brzini čestice u tim točkama), silu koja djeluje na česticu zovemo konzervativnom. Možemo pokazati da je u tom slučaju rad po zatvorenoj putanji nula

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0. \tag{2.70}$$

Integral po zatvorenoj putanji možemo rastaviti na dva dijela točkama A i B

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A(I)}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{B(II)}^{A} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{2.71}$$

Promjena smjera integracije po putanji II daje samo promjenu predznaka jer $d\vec{r}$ u tom slučaju prelazi u $-d\vec{r}$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A(I)}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{A(II)}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{AB}(I) - W_{AB}(II). \tag{2.72}$$

Rad prema pretpostavci ne ovisi o putanji pa se doprinosi I i II poništavaju

$$W_{AB}(I) - W_{AB}(II) \Longrightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \tag{2.73}$$

Ukupan rad je nula. Primjenom Stokesovog teorema možemo izvesti ekvivalentni uvjet konzervativnosti sile $\vec{F}$. Linijski integral vektorskog polja $\vec{F}$ po krivulji C jednak je plošnom integralu rotacije vektorskog polja $\nabla \times \vec{F}$ po površini obuhvaćenoj krivuljom C

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \left(\nabla \times \vec{F} \right) \cdot \vec{n} da, \tag{2.74}$$

gdje je S površina obuhvaćena konturom C, da je diferencijalni element površine, a $\vec{n}$ jedinični vektor okomit na element površine Stokesov teorem (2.74) vrijedi za svaku putanju C i pripadnu površinu S, pa i za infinitezimalnu petlju i površinu. Stoga polje $\vec{F}$ u svakoj točki mora biti bezvrtložno

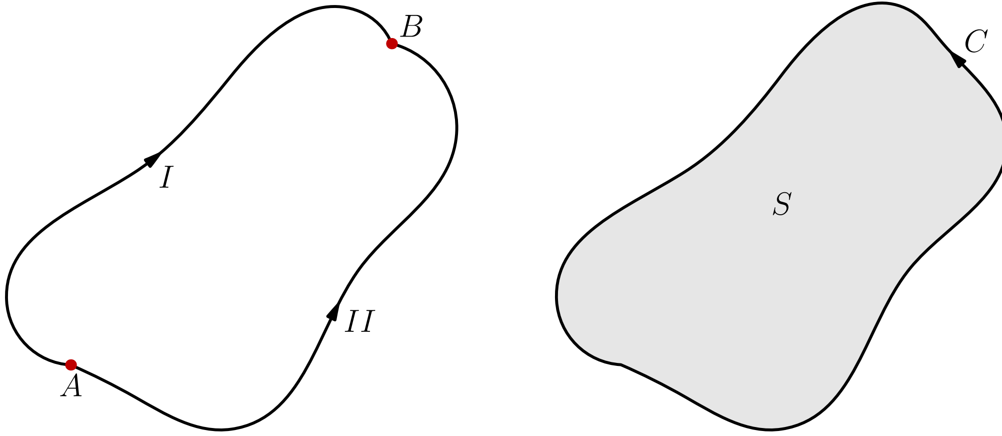
$$\nabla \times \vec{F} = 0. \tag{2.75}$$

Slijedi da postoji skalarno polje U, takvo da vrijedi

$$\vec{F} = -\nabla U. \tag{2.76}$$

Negativan predznak smo pritom izabrali po konvenciji. Polje U zovemo potencijalna energija. Vratimo se izrazu za rad

$$W_{AB} = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{A}^{B} (\nabla U) \cdot d\vec{r}. \tag{2.77}$$



Slika 2.8: Lijevo: zatvorena putanja podijeljena na dva dijela točkama A i B. Desno: Ploha S obuhvaćena krivuljom C.

Podintegralnu funkciju možemo napisati u obliku

$$\nabla U \cdot d\vec{r} = \left[\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right] \cdot \left[dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right]. \tag{2.78}$$

Skalarni produkt

$$\nabla U \cdot d\vec{r} = \left[\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right], \tag{2.79}$$

odgovara totalnom diferencijalu potencijalne energije

$$\nabla U \cdot d\vec{r} = dU. \tag{2.80}$$

Rad izvršen na čestici jednak je razlici potencijalnih energija u početnoj i konačnoj točki putanje

$$W_{AB} = -\int_A^B dU = (-U)|_A^B = U(A) - U(B). \tag{2.81}$$

Dakle, za gibanje po fizikalnoj putanji vrijedi

$$W_{AB} = T(B) - T(A) = U(A) - U(B). \tag{2.82}$$

Suma kinetičke i potencijalne energije u konzervativnom sustavu je sačuvana (ukupna energija)

$$T(A) + U(A) = T(B) + U(B). \tag{2.83}$$

Primjer 2.5

Pokažite da je polje sile

$$\vec{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\vec{i} + 2xyz^3\vec{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\vec{k}$$

konzervativno. Nađite potencijal i rad potreban da se čestica pomakne iz točke $T_1(-2, 1, 3)$ do točke $T_2(1, -2, -1)$.

Polje je konzervativno ako vrijedi

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0. \tag{2.84}$$

Raspišemo determinantu

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} = & \vec{i} \left[\partial_y(3xy^2z^2 - 6x^2z) - \partial_z(2xyz^3) \right] \\ & - \vec{j} \left[\partial_x(3xy^2z^2 - 6x^2z) - \partial_z(y^2z^3 - 6xz^2) \right] \\ & + \vec{k} \left[\partial_x(2xyz^3) - \partial_y(y^2z^3 - 6xz^2) \right]. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Izračunamo potrebne derivacije

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{i} \left[6xyz^2 - 6xyz^2 \right] - \vec{j} \left[3y^2z^2 - 12xz - 3y^2z^2 + 12xz \right] + \vec{k} \left[2yz^3 - 2yz^3 \right] = 0.$$

Rotacija polja $\vec{F}$ iščezava pa je polje konzervativno. Dakle, sigurno postoji skalarno polje U za koje vrijedi

$$\vec{F} = -\nabla U \Longrightarrow F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\partial_x U\vec{i} - \partial_y U\vec{j} - \partial_z U\vec{k}. \tag{2.86}$$

Prethodna jednadžba zapravo predstavlja tri jednadžbe

$$-\partial_x U = F_x = y^2z^3 - 6xz^2, \tag{2.87}$$

$$-\partial_y U = F_y = 2xyz^3, \tag{2.88}$$

$$-\partial_z U = F_z = 3xy^2z^2 - 6x^2z. \tag{2.89}$$

Integriramo jedn. (2.87)

$$U(x, y, z) = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + f(y, z), \tag{2.90}$$

pri čemu je $f(y, z)$ proizvoljna funkcija koja ovisi samo o y i z. Uvrstimo rješenje (2.90) u jedn (2.88)

$$2xyz^3 - \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = 2xyz^3 \Longrightarrow f(y, z) = g(z) + c, \tag{2.91}$$

odnosno

$$U(x,y,z) = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + g(z) + c. \qquad (2.92)$$

Sada uvrstimo rješenje (2.92) u jedn. (2.89)

$$3xy^2z^2 - 6x^2z - g'(z) = 3xy^2z^2 - 6x^2z \Longrightarrow g(z) = c. \qquad (2.93)$$

Skalarno polje $U(x,y,z)$ tj. potencijal glasi

$$U(x,y,z) = -xy^2z^3 + 3x^2z^2. \qquad (2.94)$$

Rad potreban za pomicanje čestice iz točke $T_1(-2,1,3)$ do točke $T_2(1,-2,-1)$ jednak je razlici potencijala u početnoj i konačnoj točki

$$W = U(x_1,y_1,z_1) - U(x_2,y_2,z_2). \qquad (2.95)$$

Potencijal u početnoj točki T_1

$$U(x_1,y_1,z_1) = -(-2)\cdot 1\cdot 3^3 + 3\cdot 2^2\cdot 3^2 = 54 + 108 = 162. \qquad (2.96)$$

Potencijal u konačnoj točki T_2

$$U(x_2,y_2,z_2) = -1\cdot 2^2\cdot(-1)^3 + 3\cdot 1^2\cdot(-1)^2 = 4 + 3 = 7. \qquad (2.97)$$

Rad je jednak razlici potencijala

$$W = U_1 - U_2 = 162 - 7 = 155. \qquad (2.98)$$

2.4.3 Konzervativni sistem dviju čestica

Prethodno razmatranje nije potpuno jer ne uzima u obzir čestice koje predstavljaju izvor sile $\vec{F}$. Promotrimo stoga sustav dvije čestice, pri čemu su položaji čestica dani vektorima $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$. Označimo s $\vec{r}_{12}$ relativni položaj čestice 1 u odnosu na česticu 2, a s $\vec{e}_{12}$ pripadni jedinični vektor. Neka je $\{A\}$ početna, a $\{B\}$ konačna konfiguracija sustava

- početni položaj prve čestice: $\vec{r}_1(A)$,
- početni položaj druge čestice: $\vec{r}_2(A)$,
- konačni položaj prve čestice: $\vec{r}_1(B)$,
- konačni položaj druge čestice: $\vec{r}_2(B)$.

Označimo s $\vec{F}_{12}$ silu kojom čestica 2 djeluje na česticu 1, a s $\vec{F}_{21}$ silu kojom čestica 1 djeluje na česticu 2. Izračunamo radove izvršene na česticama tijekom gibanja od početne do konačne točke

$$W_{AB}(1) = \int_A^B \vec{F}_{12} d\vec{r}_1 \quad \text{i} \quad W_{AB}(2) = \int_A^B \vec{F}_{21} d\vec{r}_2. \tag{2.99}$$

Možemo pokazati da je sustav konzervativan ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

- Sile udovoljavaju trećem Newtonovom zakonu

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\vec{F}_{21}(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \tag{2.100}$$

- Sile su centralne (leže na spojnicama čestica)

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = f_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\vec{e}_{12}. \tag{2.101}$$

- Iznos sile ovisi samo o udaljenosti među česticama

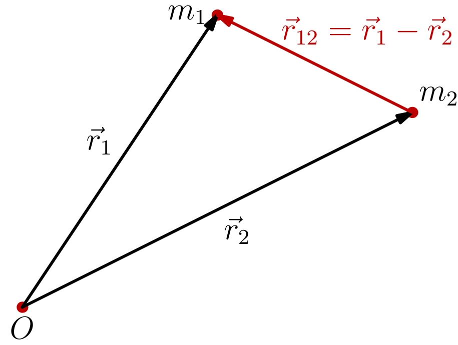
$$\vec{F}_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = f_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)\vec{e}_{12}. \tag{2.102}$$

U tom slučaju možemo uvesti potencijalnu funkciju $U_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$, takvu da vrijedi

$$\vec{F}_{12} = -\nabla_1 U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \nabla_2 U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\vec{F}_{21}. \tag{2.103}$$

Želimo pokazati da je sila koja udovoljava uvjetima (2.100), (2.101) i (2.102) konzervativna. Radovi izvršeni na česticama 1 i 2 iznose

$$W_{AB}^{(1)} = \int_A^B \vec{F}_{12} d\vec{r}_1 \quad \text{i} \quad W_{AB}^{(2)} = \int_A^B \vec{F}_{21} d\vec{r}_2. \tag{2.104}$$



Slika 2.9: Vektor relativnog položaja čestice 1 u odnosu na česticu 2.

Potencijalna funkcija $U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ ovisi o o obje putanje pa računamo ukupni rad

$$W_{tot} = W_{AB}^{(1)} + W_{AB}^{(2)} = \int_A^B \Big[\vec{F}_{12} d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} d\vec{r}_2\Big]. \tag{2.105}$$

Iskoristimo relaciju $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$$W_{tot} = \int_A^B \vec{F}_{12} \, [d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2] = \int_A^B (-\nabla_1 U_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)) \, [d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2]. \tag{2.106}$$

Definiramo relativnu koordinatu

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 \equiv \vec{r}_{12}. \tag{2.107}$$

Potencijalna funkcija ovisi samo o $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$

$$\Longrightarrow \nabla_{\vec{r}_1} U_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \nabla_{\vec{r}_1 - \vec{r}_2} U_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \tag{2.108}$$

Ukupni rad koji čestice izvrše jedna na drugoj

$$W_{tot} = \int_A^B (-\nabla_{\vec{r}_1 - \vec{r}_2} U_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)) \, [d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2] = \int_A^B (-\nabla_{\vec{r}} U_{12}(|\vec{r}|)) \, d\vec{r} \tag{2.109}$$

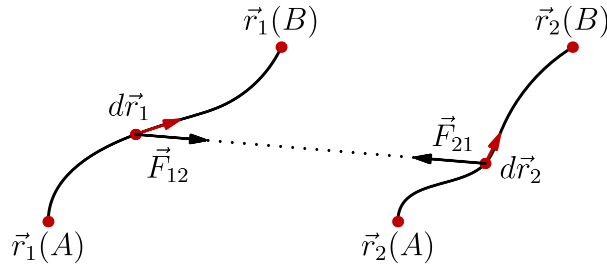
$$W_{tot} = -\int_A^B dU_{12}(|\vec{r}|) = U_{12}(|\vec{r}_1(A) - \vec{r}_2(A)|) - U_{12}(|\vec{r}_1(B) - \vec{r}_2(B)|), \tag{2.110}$$

jednak je promjeni potencijalne funkcije u početnoj (A) i konačnoj (B) konfiguraciji. Već smo zaključili da je rad jednak razlici konačne i početne kinetičke energije sustava

$$T_1(B) + T_2(B) - T_1(A) - T_2(A) = U_{12}(|\vec{r}_1(A) - \vec{r}_2(A)|) - U_{12}(|\vec{r}_1(B) - \vec{r}_2(B)|). \tag{2.111}$$

Ukupna energija u konzervativnom sustavu je sačuvana

$$T_1(A) + T_2(A) + U_{12}(|\vec{r}_1(A) - \vec{r}_2(A)|) = T_1(B) + T_2(B) + U_{12}(|\vec{r}_1(B) - \vec{r}_2(B)|). \tag{2.112}$$



Slika 2.10: Dvije čestice se gibaju od početne prema konačnoj točki.

Primjer: gravitacijska sila

Pretpostavimo da tijela imaju mase m_1 i m_2. Potencijalna energija gravitacijskog međudjelovanja

$$U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \tag{2.113}$$

Sila na česticu 1 iznosi

$$\vec{F}_{12} = -\nabla_1 U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\left[\partial_{x_1}\vec{i} + \partial_{y_1}\vec{j} + \partial_{z_1}\vec{k}\right] U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \tag{2.114}$$

Prvo računamo parcijalnu derivaciju ∂_{x_1}

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}}, \tag{2.115}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -\frac{2(x_1-x_2)}{2\left[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2\right]^{3/2}}, \tag{2.116}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -\frac{x_1-x_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \tag{2.117}$$

Jednakim postupkom bi izračunali derivacije ∂_{y_1} i ∂_{z_1}

$$\nabla_1\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -\frac{(x_1-x_2)\vec{j} + (y_1-y_2)\vec{j} + (z_1-z_2)\vec{k}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \tag{2.118}$$

$$\nabla_1\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \tag{2.119}$$

Došli smo do poznatog izraza za gravitacijsku silu kojom čestica 2 djeluje na česticu 1

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}\vec{e}_{12}. \tag{2.120}$$

Pritom smo iskoristili relaciju

$$\vec{e}_{12} = -\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \tag{2.121}$$

Mehanički sustavi s jednim stupnjem slobode

3.1 Konzervativni sustavi

Čestica mase m giba se po osi x pod utjecajem konzervativne sile

$$\vec{F} = -\nabla U(x) = -\frac{dU}{dx}\vec{i}. \tag{3.1}$$

Newtonova jednadžba gibanja

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}, \tag{3.2}$$

je diferencijalna jednadžba drugog reda koja ne ovisi eksplicitno o vremenu. Koristimo metodu snižavanja reda jednadžbe uvodeći supstituciju

$$v = \dot{x} \Longrightarrow \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \tag{3.3}$$

Newtonova jednadžba gibanja

$$mv\frac{dv}{dx} = -\frac{dU}{dx} \Longrightarrow \frac{m}{2}\frac{dv^2}{dx} + \frac{dU}{dx} = 0, \tag{3.4}$$

svodi se na zakon sačuvanja energije

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{m}{2}v^2 + U(x)\right] = 0 \Longrightarrow \frac{m}{2}v^2 + U(x) = E. \tag{3.5}$$

Uvrstimo natrag supstituciju $v = \dot{x}$

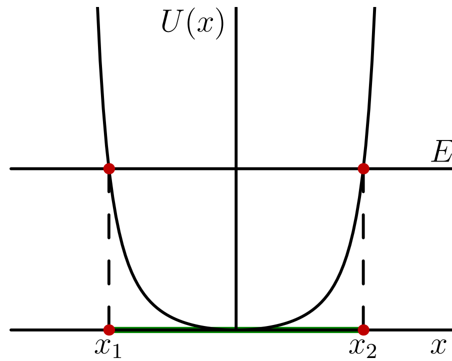
$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E \Longrightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x)} \tag{3.6}$$

Brzina čestice može biti pozitivna ili negativna. Pozitivan predznak znači da se varijabla x povećava s vremenom i obratno. Kinetička energija čestice je uvijek pozitivna pa se čestica može gibati samo u području u kojem vrijedi $U(x) \leq E$. Takvo područje zovemo klasično dozvoljeno područje. Krajnje točke klasično dozvoljenog područja zovemo točke obrata, a definirane su uvjetom

$$U(x) = E. \tag{3.7}$$

Diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x)} \tag{3.8}$$



Slika 3.1: Čestica se može gibati samo unutar intervala $[x_1, x_2]$ jer je tamo ispunjen uvjet $U(x) \leq E$. Točke x_1 i x_2 zovemo točke obrata, a interval $[x_1, x_2]$ klasično dozvoljeno područje.

možemo riješiti metodom separacije varijabli

$$\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}dt. \tag{3.9}$$

Lijevu stranu integriramo u granicama od x_0 do x, a desnu u granicama od 0 do t

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}}. \tag{3.10}$$

Bitno je uočiti da se u prethodnoj jednadžbi nalaze dvije konstante (energija i x_0) jer smo krenuli od diferencijalne jednadžbe drugog reda (Newtonova jednadžba gibanja).

Primjer 3.1

Čestica mase m giba se u potencijalu harmoničkog oscilatora

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Nađite klasično dozvoljeno područje.

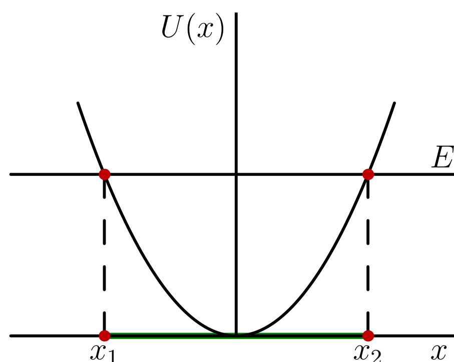
Točke obrata možemo odrediti iz uvjeta jednakosti energije i potencijala (3.7)

$$\frac{1}{2}kx^2 = E. \tag{3.11}$$

Postoje dva simetrična rješenja ($x_1 = -x_2$)

$$x_1 = -\sqrt{\frac{2E}{k}} \quad \text{i} \quad x_2 = \sqrt{\frac{2E}{k}}. \tag{3.12}$$

Gibanje je uvijek omeđeno. Čestica oscilira između točaka x_1 i x_2.



Slika 3.2: Energija čestice mora biti pozitivna ili jednaka nuli. Gibanje je omeđeno, odnosno čestica oscilira između dvije točke obrata x_1 i x_2.

Primjer 3.2

Čestica mase m giba se u potencijalu

$$U(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}); A, \alpha > 0.$$

Nađite klasično dozvoljeno područje. Posebno promotrite slučajeve $E < 0$ i $E \geq 0$.

Točke obrata možemo odrediti iz uvjeta jednakosti energije i potencijala (3.7)

$$Ae^{-2\alpha x} - 2Ae^{-\alpha x} = E. \tag{3.13}$$

Napravimo li supstituciju $e^{-\alpha x} = u$, doći ćemo do kvadratne jednadžbe

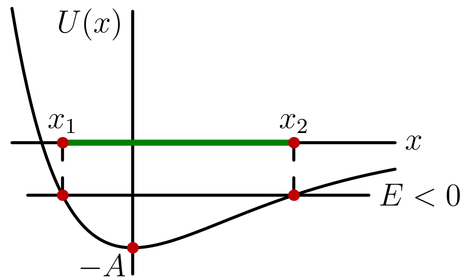
$$Au^2 - 2Au - E = 0 \Longrightarrow u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{A}}. \tag{3.14}$$

Uočimo da energija ne može biti manja od minimuma potencijala $U_{min} = -A$ pa je izraz pod korijenom uvijek pozitivan. Ukoliko je energija negativna oba rješenja kvadratne jednadžbe su pozitivna jer je izraz pod korijenom manji od jedan. Postoje dvije točke obrata

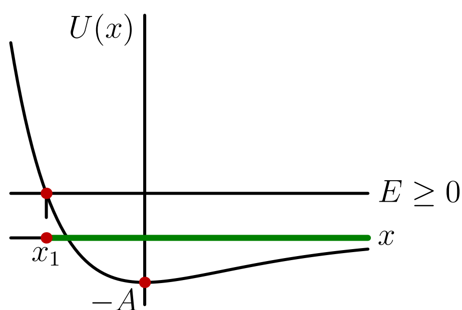
$$x_1 = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 + \sqrt{1 - \frac{|E|}{A}}\right] \quad \text{i} \quad x_2 = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 - \sqrt{1 - \frac{|E|}{A}}\right]. \tag{3.15}$$

Čestica u tom slučaju oscilira između točaka x_1 i x_2. Ako je energija čestice pozitivna, rješenje u_2 je negativno pa postoji samo točka obrata koja odgovara rješenju u_1

$$x_1 = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 + \sqrt{1 + \frac{E}{A}}\right]. \tag{3.16}$$



Slika 3.3: Energija čestice je negativna. Gibanje je omeđeno, odnosno čestica oscilira između dvije točke obrata x_1 i x_2.



Slika 3.4: Energija čestice je pozitivna. Gibanje je neomeđeno, a postoji samo jedna točka obrata x_1.

Gibanje je neomeđeno, odnosno klasično dozvoljeno područje odgovara intervalu $[x_1, \infty\rangle$. Poseban slučaj predstavlja situacija kada je energija čestice jednaka nuli. I tada je gibanje neomeđeno s jednom točkom obrata

$$x_1 = -\frac{1}{\alpha} \ln 2. \tag{3.17}$$

Čestici je dostupan cijeli interval $[x_1, \infty\rangle$ na osi x.

Primjer 3.3

Čestica mase m giba se u potencijalu harmoničkog oscilatora

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Nađite putanju čestice ako u početnom trenutku vrijedi $x(0) = -a$ i $\dot{x}(0) = 0$.

Koristeći početne uvjete, izračunamo energiju čestice

$$\frac{m}{2}\dot{x}(0)^2 + \frac{k}{2}x(0)^2 = \frac{k}{2}a^2. \tag{3.18}$$

U početnom trenutku čestica se nalazi u točki obrata $x = -a$ (jer je brzina jednaka nuli) i počinje se gibati prema ishodištu. Primjenom jedn. (3.10) i pritom biramo pozitivan predznak. Integriramo od početne točke $x(0) = -a$ do proizvoljne vrijednosti varijable x

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{-a}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{E - \frac{k}{2}x'^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\int_{-a}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{a^2 - x'^2}}. \tag{3.19}$$

Prepoznamo integral iz Bronštejna (br. 164)

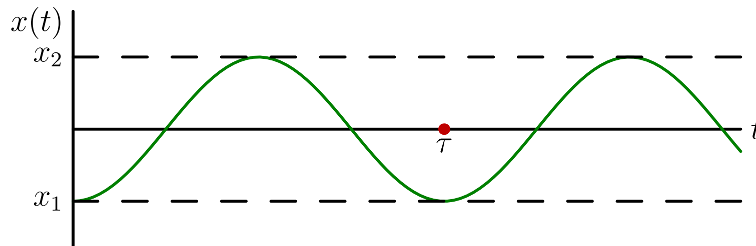
$$t = \sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin\frac{x'}{a}\bigg|_{-a}^{x}, \tag{3.20}$$

a zatim uvrstimo granice integracije

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}}\left[\arcsin\frac{x}{a} + 1\right]. \tag{3.21}$$

Invertiramo prethodnu relaciju

$$x(t) = -a\cos(\omega t), \tag{3.22}$$



Slika 3.5: Putanja čestice u potencijalu harmoničkog oscilatora ako u početnom trenutku čestica miruje u točki $x_1 = -a$.

gdje je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{3.23}$$

Period gibanja možemo odrediti iz uvjeta

$$\omega\tau = 2\pi \Longrightarrow \tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{3.24}$$

Period osilacija u slučaju harmoničkog oscilatora ne ovisi o energiji (tj. amplitudi) gibanja.

Primjer 3.4

Čestica mase m giba se u potencijalu

$$U(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}), \quad A, \alpha > 0.$$

Nađite putanju čestice ako u početnom trenutku vrijedi $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = -\sqrt{2A/m}$.

Koristeći početne uvjete možemo izračunati energiju čestice

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2(0) + U(x = 0) = A - A = 0. \tag{3.25}$$

Polazeći od sačuvanja energije, možemo izračunati brzinu čestice

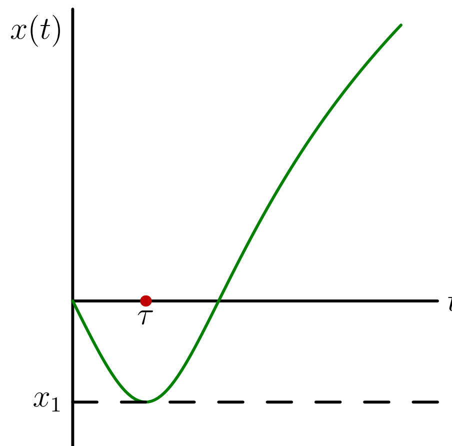
$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x)}. \tag{3.26}$$

Čestica se u početnom trenutku giba od ishodišta prema točki obrata x_1 pa biramo negativan predznak. Nadalje, uvrštavamo zadanu vrijednost energije i potencijal

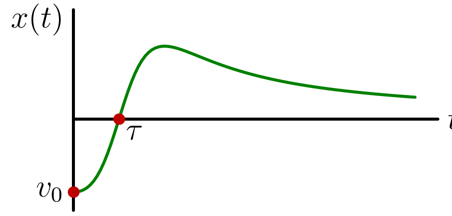
$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{2A}{m}}\sqrt{2e^{-\alpha x} - e^{-2\alpha x}}. \tag{3.27}$$

Separiramo varijable i integriramo obje strane

$$\int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{2e^{-\alpha x'} - e^{-2\alpha x'}}} = -\sqrt{\frac{2A}{m}}\int_0^t dt'. \tag{3.28}$$



Slika 3.6: Putanja čestice u Morseovom potencijalu ako je energija čestice jednaka nuli, a u početnom trenutku čestica se nalazi u ishodištu i giba se prema točki obrata x_1.



Slika 3.7: Brzina čestice u Morseovom potencijalu ako je energija čestice jednaka nuli, a u početnom trenutku čestica se nalazi u ishodištu i giba se prema točki obrata x_1.

Pomnožimo brojnik i nazivnik podintegralne funkcije s $e^{\alpha x'}$

$$\int_0^x \frac{e^{\alpha x'}dx'}{\sqrt{2e^{\alpha x'}-1}} = -\sqrt{\frac{2A}{m}}t, \tag{3.29}$$

a zatim napravimo supstituciju $u = e^{\alpha x'}$

$$\int_1^{e^{\alpha x}} \frac{du}{\sqrt{2u-1}} = -\sqrt{\frac{2A}{m}}\alpha t. \tag{3.30}$$

Preostali integral je elementaran

$$\sqrt{2e^{\alpha x}-1} - 1 = -\sqrt{\frac{2A}{m}}\alpha t. \tag{3.31}$$

Invertiramo prethodnu relaciju i dolazimo do putanje

$$x(t) = \frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{2A}{m}}\alpha t\right)^2\right]. \tag{3.32}$$

Čestica se u vremenskom intervalu od početnog trenutka do vremena $\tau = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2A}}$ giba od ishodišta do točke obrata $x_1 = -\ln 2/\alpha$. Nakon toga čestica mijenja smjer gibanja i s vremenom se beskonačno udaljava od ishodišta, kao što je prikazano na sl. 3.6. Deriviramo li rješenje $x(t)$ po vremenu, dobit ćemo ovisnost brzine čestice o vremenu (slika 3.7)

$$\dot{x}(t) = -2\sqrt{\frac{2A}{m}}\frac{1 - \sqrt{\frac{2A}{m}}\alpha t}{1 + \left(1 - \sqrt{\frac{2A}{m}}\alpha t\right)^2}. \tag{3.33}$$

Brzina mijenja predznak kada čestica stigne u točku obrata. Udaljavanjem od ishodišta brzina čestice teži k nuli jer se potencijal asimptotski približava nuli, a energija čestice je nula.

Primjer 3.5

Čestica mase m giba se u potencijalu

$$U(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}); \quad A, \alpha > 0.$$

Uz pretpostavku da je energija čestice negativna i da se čestica na početku nalazi u točki obrata x_1, nađite putanju $x(t)$. Koliki je period gibanja čestice?

Položaje točaka obrata izračunali smo u primjeru 2. Iskoristimo li sačuvanje energije i početni uvjet, doći ćemo do sljedećeg izraza

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{-|E| - A(e^{-2\alpha x'} - 2e^{-\alpha x'})}}, \tag{3.34}$$

Koristimo supstituciju

$$u = e^{-\alpha x'} \to du = -\alpha e^{-\alpha x'} dx' \to dx' = -\frac{du}{\alpha u}. \tag{3.35}$$

Granice integracije prelaze u

$$u_1 = e^{-\alpha x_1} \quad \text{i} \quad u = e^{-\alpha x}. \tag{3.36}$$

Integral

$$t = -\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{u_1}^{u} \frac{du}{u\sqrt{-Au^2 + 2Au - |E|}}. \tag{3.37}$$

možemo pronaći u tablicama integrala (Bronštejn, br. 258)

$$I = \int \frac{du}{u\sqrt{au^2 + bu + c}}. \tag{3.38}$$

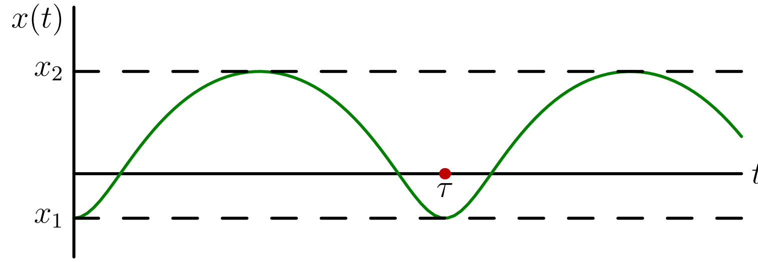
Rezultat ovisi o vrijednostima parametara c i $\Delta = 4ac - b^2$. U našem slučaju vrijedi

- $c = -|E| < 0$
- $|E| < A \Longrightarrow \Delta = 4AE - 4A^2 = 4A(|E| - A) < 0$

$$\Longrightarrow \int \frac{du}{u\sqrt{au^2 + bu + c}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bu + 2c}{u\sqrt{-\Delta}} \tag{3.39}$$

Uvrstimo granice integracije u rješenje neodređenog integrala

$$t = -\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2|E|}} \arcsin \frac{2Au - 2|E|}{u\sqrt{4A^2 - 4A|E|}}\Bigg|_{u_1}^{e^{-\alpha x}}, \tag{3.40}$$



Slika 3.8: Čestica oscilira između točaka obrata x_1 i x_2. Period oscilacija iznosi τ.

a zatim izračunamo donju granicu integracije

$$u_1 = e^{-\alpha x_1} = e^{\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{|E|}{A}}\right)} = 1 + \sqrt{1 - \frac{|E|}{A}}. \tag{3.41}$$

Konačno, dolazimo do rješenja

$$x(t) = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{A}{|E|} + \frac{1}{\alpha}\ln\left[1 - \sqrt{1 - \frac{|E|}{A}}\cos\left(\sqrt{\frac{2|E|}{m}}\alpha t\right)\right]. \tag{3.42}$$

Oscilacije očito nisu harmoničke. Period gibanja nalazimo iz uvjeta

$$\sqrt{\frac{2|E|}{m}}\alpha\tau = 2\pi \Longrightarrow \tau = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{|E|}}. \tag{3.43}$$

3.2 Gibanje u mediju s otporom

Pretpostavimo da se čestica mase m giba u jednoj dimenziji pod utjecajem konstantne sile F i sile otpora koja je proporcionalna nekoj potenciji brzine. Jednadžba gibanja u tom slučaju glasi

$$m\ddot{x} = F - \beta \left(\dot{x}\right)^{\alpha}. \tag{3.44}$$

Radi se o diferencijalnoj jednadžbi drugog reda koja ne ovisi eksplicitno o x pa je možemo riješiti metodom snižavanja reda jednadžbe. Koristimo supstituciju $\dot{x} = v$

$$m\dot{v} = F - \beta v^{\alpha}. \tag{3.45}$$

Prethodnu jednadžbu (prvog reda) možemo riješiti separacijom varijabli

$$m\frac{dv}{dt} = F - \beta v^{\alpha} \Longrightarrow \frac{mdv}{F - \beta v^{\alpha}} = dt. \tag{3.46}$$

Lijevu stranu integriramo od v_0 do v, a desnu od 0 do t

$$\int_{v_0}^{v} \frac{mdv'}{F - \beta (v')^{\alpha}} = t. \tag{3.47}$$

Primjer 3.6

U trenutku $t = 0$ padobranac mase m nalazi se u točki $z = 0$ i pada prema površini Zemlje brzinom v_0. Ako je sila otpora zraka proporcionalna trenutnoj brzini padobranca (konstanta proporcionalnosti je β), nađite položaj, brzinu i ubrzanje padobranca u bilo kojem trenutku prije udarca u površinu Zemlje. Za svaku od dobijenih veličina nađite graničnu vrijednost $\beta \to 0$.

Na padobranca djeluje sila teža prema dolje i sila otpora zraka prema gore (tj. u smjeru suprotnom od smjera gibanja). Jednadžba gibanja padobranca glasi

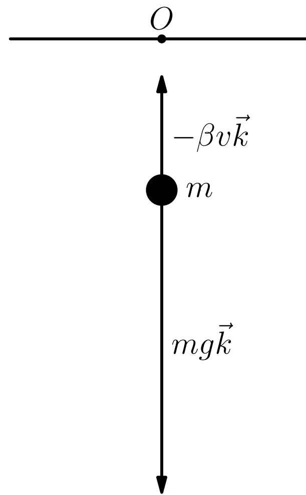
$$m\frac{dv}{dt} = mg - \beta v. \tag{3.48}$$

Separiramo varijable

$$\frac{mdv}{mg - \beta v} = \int_0^t dt', \tag{3.49}$$

a zatim integriramo lijevu i desnu stranu

$$\int_{v_0}^{v} \frac{mdv'}{mg - \beta v'} = t. \tag{3.50}$$



Slika 3.9: Na padobranca djeluje sila teža $mg\vec{k}$ i sila otpora zraka $-\beta v\vec{k}$. Pritom je v trenutna brzina čestice, a β je konstanta proporcionalnosti između sile otpora i trenutne brzine. Koordinatni sustav smo orjentirali tako da je os z usmjerena prema površini Zemlje, a ishodište se nalazi u točki O.

Integral na lijevoj strani možemo riješiti metodom supstitucije

$$\int_{v_0}^{v} \frac{mdv'}{mg-\beta v'} = -\frac{m}{\beta}\int_{v_0}^{v} \frac{d(mg-\beta v')}{mg-\beta v'} = -\frac{m}{\beta}\ln\left(mg-\beta v'\right)\Big|_{v_0}^{v}. \tag{3.51}$$

Uvrstimo granice integracije

$$\ln\frac{mg-\beta v}{mg-\beta v_0} = -\frac{\beta}{m}t, \tag{3.52}$$

a zatim invertiramo prethodnu relaciju

$$v(t) = \frac{mg}{\beta} + (v_0 - \frac{mg}{\beta})e^{-\frac{\beta}{m}t}. \tag{3.53}$$

Deriviranjem brzine dolazimo do akceleracije

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(g - \frac{\beta v_0}{m}\right)e^{-\frac{\beta}{m}t}. \tag{3.54}$$

Nakon dovoljno dugog vremena akceleracija pada na nulu. Padobranac se dalje giba jednolikom brzinom koju zovemo granična brzina

$$v_{gr} = \frac{mg}{\beta}. \tag{3.55}$$

Integriranjem brzine dolazimo do položaja padobranca

$$z(t) - z(t=0) = \int_0^t v(t')dt'. \tag{3.56}$$

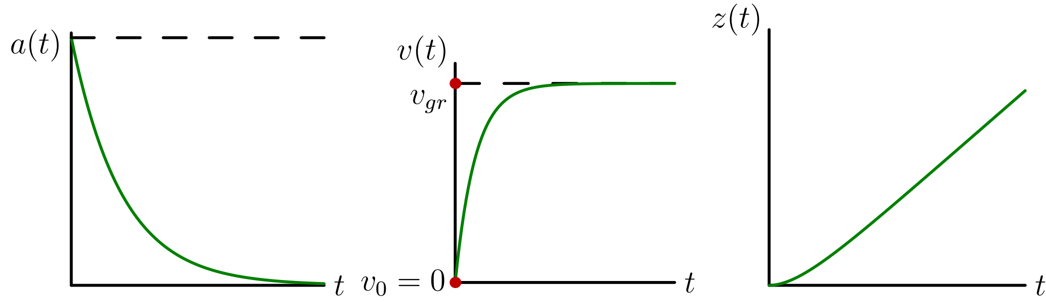
$$z(t) = \int_0^t \left[\frac{mg}{\beta} + (v_0 - \frac{mg}{\beta})e^{-\frac{\beta}{m}t'}\right]dt' \tag{3.57}$$

$$z(t) = \frac{mgt}{\beta} + \frac{m}{\beta}\left[v_0 - \frac{mg}{\beta}\right]\left(1 - e^{-\beta t/m}\right). \tag{3.58}$$

Promotrimo još i limese pojedinih veličina kada $\beta \to 0$ (slučaj kada nema otpora zraka).

- akceleracija:

$$\lim_{\beta\to 0}\left(g - \frac{\beta v_0}{m}\right)e^{-\frac{\beta}{m}t} = g. \tag{3.59}$$



Slika 3.10: Ubrzanje, brzina i položaj padobranca u ovisnosti o vremenu. Nakon dovoljno dugo vremena ubrzanje pada na nulu, brzina se približava graničnoj vrijednosti $v_{gr} = mg/\beta$, a graf $z(t)$ približava se pravcu. Početna brzina u primjeru na slici iznosi nula.

- brzina:

$$v(\beta \to 0) = \lim_{\beta \to 0} \left[\frac{mg}{\beta} + \left(v_0 - \frac{mg}{\beta} \right) e^{-\frac{\beta}{m}t} \right] \tag{3.60}$$

$$v(\beta \to 0) = \lim_{\beta \to 0} \left[v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{mg}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t} \right) \right] \tag{3.61}$$

$$v(\beta \to 0) = v_0 + mg \lim_{\beta \to 0} \frac{1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}}{\beta}. \tag{3.62}$$

Izraz je neodređen $\left(\frac{0}{0}\right)$ pa možemo iskoristiti L'Hospitalovo pravilo

$$v(\beta \to 0) = v_0 + mg \lim_{\beta \to 0} \frac{+\frac{t}{m} e^{-\frac{\beta}{m}t}}{1} \tag{3.63}$$

$$v(\beta \to 0) = v_0 + gt. \tag{3.64}$$

- položaj:

$$z(t) = \lim_{\beta \to 0} \left\{ \frac{mgt}{\beta} + \frac{m}{\beta} \left[v_0 - \frac{mg}{\beta} \right] \left(1 - e^{-\beta t/m} \right) \right\} \tag{3.65}$$

$$z(t) = \lim_{\beta \to 0} m v_0 \frac{1 - e^{-\beta t/m}}{\beta} + mg \lim_{\beta \to 0} \frac{\beta t - m \left(1 - e^{-\beta t/m} \right)}{\beta^2}. \tag{3.66}$$

Oba limesa su neodređena $\left(\frac{0}{0}\right)$ pa opet koristimo L'Hospitalovo pravilo.

$$z(t) = \lim_{\beta \to 0} m v_0 \frac{(t/m) e^{-\beta t/m}}{1} + mg \lim_{\beta \to 0} \frac{t - m(t/m) e^{-\beta t/m}}{2\beta} \tag{3.67}$$

$$z(t) = v_0 t + \frac{1}{2} mgt \lim_{\beta \to 0} \frac{1 - e^{-\beta t/m}}{\beta}. \tag{3.68}$$

Na drugi limes primjenimo L'Hospitalovo pravilo još jednom

$$z(t) = \lim_{\beta \to 0} v_0 t + \frac{1}{2} mgt \lim_{\beta \to 0} \frac{(t/m)e^{-\beta t/m}}{1} \tag{3.69}$$

$$z(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2. \tag{3.70}$$

U graničnom slučaju $\beta \to 0$ uspjeli smo reproducirati sve poznate rezultate slobodnog pada.

4 Koordinatni sustavi

4.1 Kartezijev sustav

Položaj točke P u Kartezijevom sustavu definiramo pomoću tri koordinate x, y i z. Smjer promjene svake koordinate definira odgovarajući jedinični vektor u Kartezijevom sustavu. Jedinični vektori Kartezijevog sustava $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ čine desni ortonormirani sustav. To znači da

1. su međusobno ortogonalni: $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$
2. su normirani: $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$
3. za vektorske produkte vrijedi: $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}, \quad \vec{i} = \vec{j} \times \vec{k}, \quad \vec{j} = \vec{k} \times \vec{i}$

Položaj točke P određen je radijus-vektorom

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{4.1}$$

Općeniti vektor $\vec{a}$ možemo raspisati pomoću jediničnih vektora Kartezijevog sustava

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \tag{4.2}$$

Kod operacija s vektorima vrijede iste formule kao u svakom desnom ortonormiranom sustavu:

1. zbroj dva vektora

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}, \tag{4.3}$$

2. skalarni produkt

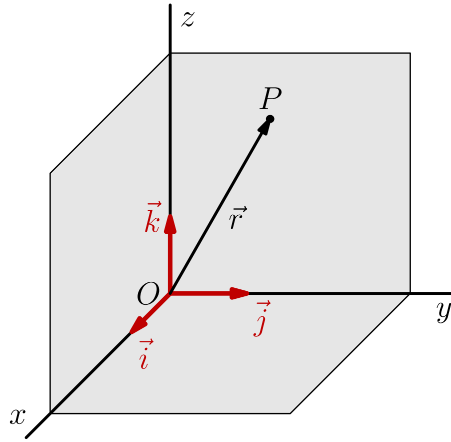
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{4.4}$$

3. vektorski produkt

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}. \tag{4.5}$$

Vektorski produkt možemo preglednije napisati pomoću determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$



Slika 4.1: Koordinate i jedinični vektori Kartezijevog sustava.

4.1.1 Brzina u Kartezijevom sustavu

Položaj čestice u Kartezijevom sustavu dan je s

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{4.7}$$

Brzinu čestice dobijemo deriviranjem vektora $\vec{r}$. Jedinični vektori ne mijenjaju smjer pa njihove derivacije iščezavaju

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \tag{4.8}$$

Kinetička energija čestice u Kartezijevim koordinatama

$$T = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right]. \tag{4.9}$$

4.1.2 Ubrzanje u Kartezijevom sustavu

Da bi dobili ubrzanje moramo derivirati brzinu čestice

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}. \tag{4.10}$$

Jednadžbu gibanja u kartezijevim koordinatama

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}, \tag{4.11}$$

možemo rastaviti po komponentama

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z. \tag{4.12}$$

4.1.3 Moment količine gibanja u Kartezijevom sustavu

Primjenimo formulu za zakretni impuls

$$\vec{M} = m\vec{r} \times \vec{v} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}. \tag{4.13}$$

Izračunamo determinantu

$$\vec{M} = m\vec{i}\,(y\dot{z} - z\dot{y}) + m\vec{j}\,(z\dot{x} - x\dot{z}) + m\vec{k}\,(x\dot{y} - y\dot{x})\,. \tag{4.14}$$

4.2 Cilindrični sustav

Položaj točke P u cilindričnom sustavu definiramo pomoću tri koordinate

1. Koordinata z: udaljenost točke P od ravnine xy.
2. Koordinata ρ: udaljenost projekcije točke P na ravninu xy (točka Q) od ishodišta.
3. Koordinata ϕ: kut između osi x i spojnice ishodišta i projekcije točke P na ravninu xy.

Smjer promjene svake koordinate definira odgovarajući jedinični vektor u cilindričnom sustavu. Jedinični vektori cilindričnog sustava $\vec{\rho}_0$, $\vec{\phi}_0$, $\vec{k}$ čine desni ortonormirani sustav. To znači da:

1. su međusobno ortogonalni: $\vec{\rho}_0 \cdot \vec{\phi}_0 = \vec{\rho}_0 \cdot \vec{k} = \vec{\phi}_0 \cdot \vec{k} = 0$,
2. su normirani: $\vec{\rho}_0 \cdot \vec{\rho}_0 = \vec{\phi}_0 \cdot \vec{\phi}_0 = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$,
3. za vektorske produkte vrijedi: $\vec{\rho}_0 = \vec{\phi}_0 \times \vec{k}, \quad \vec{\phi}_0 = \vec{k} \times \vec{\rho}_0, \quad \vec{k} = \vec{\rho}_0 \times \vec{\phi}_0$.

Položaj točke P određen je radijus-vektorom

$$\vec{r} = \rho\vec{\rho}_0 + z\vec{k}. \tag{4.15}$$

Želimo izvesti vezu cilindričnih i kartezijevih koordinata. Iz pravokutnog trokuta na sl. 4.3 slijedi

$$\begin{array}{lcl} x = \rho\cos\phi & & \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = \rho\sin\phi & \Longrightarrow & \phi = \arctan\left(y/x\right) \\ z = z & & z = z \end{array} \tag{4.16}$$

Općeniti vektor $\vec{a}$ uvijek možemo raspisati pomoću jediničnih vektora cilindričnog sustava

$$\vec{a} = a_\rho \vec{\rho}_0 + a_\phi \vec{\phi}_0 + a_z \vec{k}. \tag{4.17}$$

Kod operacija s vektorima vrijede iste formule kao u svakom desnom ortonormiranom sustavu.

1. Zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_\rho + b_\rho)\, \vec{\rho}_0 + (a_\phi + b_\phi)\, \vec{\phi}_0 + (a_z + b_z)\, \vec{k}. \tag{4.18}$$

2. Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

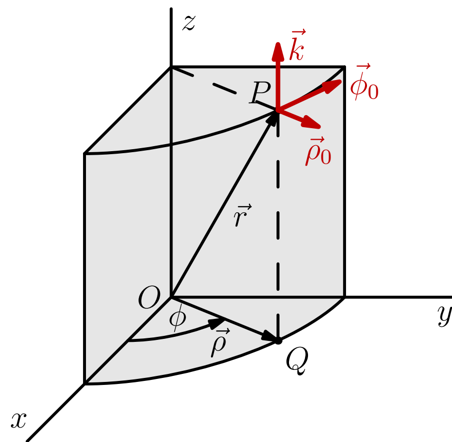
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_\rho b_\rho + a_\phi b_\phi + a_z b_z. \tag{4.19}$$

3. Vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

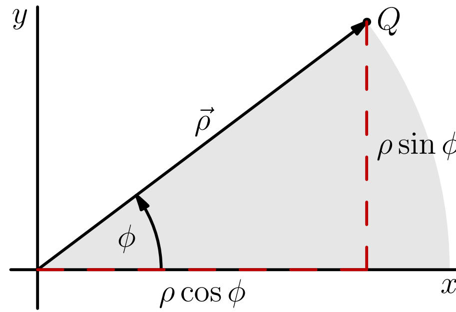
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\rho}_0 & \vec{\phi}_0 & \vec{k} \\ a_\rho & a_\phi & a_z \\ b_\rho & b_\phi & b_z \end{vmatrix}. \tag{4.20}$$

U sljedećem koraku ćemo raspisati jedinične vektore $\vec{i}$ i $\vec{j}$ pomoću jediničnih vektora cilindričnog sustava $\vec{\rho}_0$ i $\vec{\phi}_0$. Sa sl. 4.4 pročitamo:

- projekcija vektora $\vec{i}$ na smjer $\vec{\rho}_0$ iznosi $\cos\phi$
- projekcija vektora $\vec{i}$ na smjer $\vec{\phi}_0$ iznosi $-\sin\phi$



Slika 4.2: Koordinate i jedinični vektori cilindričnog sustava.



Slika 4.3: Projekcija točke P na ravninu xy.

Raspis vektora $\vec{i}$ u bazi cilindričnog sustava glasi

$$\vec{i} = \cos\phi\vec{\rho}_0 - \sin\phi\vec{\phi}_0. \tag{4.21}$$

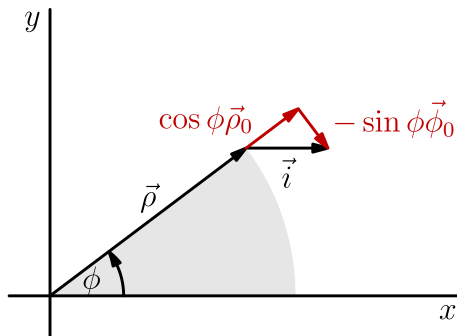
Sa sl. 4.5 pročitamo:

- projekcija vektora $\vec{j}$ na smjer $\vec{\rho}_0$ iznosi $\sin\phi$
- projekcija vektora $\vec{j}$ na smjer $\vec{\phi}_0$ iznosi $\cos\phi$

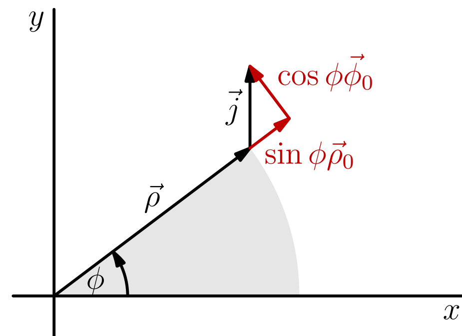
Raspis vektora $\vec{j}$ u bazi cilindričnog sustava glasi

$$\vec{j} = \sin\phi\vec{\rho}_0 + \cos\phi\vec{\phi}_0. \tag{4.22}$$

U tablici 4.1 sažeto navodimo vrijednosti skalarnih produkata jediničnih vektora Kartezijevog i cilindričnog sustava. Koristeći navedenu tablicu, možemo izraziti komponente



Slika 4.4: Rastavljanje jediničnog vektora $\vec{i}$ na vektore $\vec{\rho}_0$ i $\vec{\phi}_0$.



Slika 4.5: Rastavljanje jediničnog vektora $\vec{j}$ na vektore $\vec{\rho}_0$ i $\vec{\phi}_0$.

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{\rho}_0$	$\cos\phi$	$\sin\phi$	0
$\vec{\phi}_0$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0
$\vec{k}$	0	0	1

Tablica 4.1: Vrijednosti skalarnih produkata jediničnih vektora cilindričnog i Kartezijevog sustava.

vektora u Kartzijevom sustavu pomoću komponenti istog vektora u cilindričnom sustavu.

$$a_x = (\vec{a}\cdot\vec{i}) = \left(a_\rho\vec{\rho}_0 + a_\phi\vec{\phi}_0 + a_z\vec{k}\right)\cdot\vec{i} = a_\rho\cos\phi - a_\phi\sin\phi, \tag{4.23}$$

$$a_y = (\vec{a}\cdot\vec{j}) = \left(a_\rho\vec{\rho}_0 + a_\phi\vec{\phi}_0 + a_z\vec{k}\right)\cdot\vec{j} = a_\rho\sin\phi + a_\phi\cos\phi, \tag{4.24}$$

$$a_z = a_z. \tag{4.25}$$

Naravno, možemo napisati i inverzne relacije

$$a_\rho = (\vec{a}\cdot\vec{\rho}_0) = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\cdot\vec{\rho}_0 = a_x\cos\phi + a_y\sin\phi, \tag{4.26}$$

$$a_\phi = (\vec{a}\cdot\vec{\phi}_0) = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\cdot\vec{\phi}_0 = -a_x\sin\phi + a_y\cos\phi, \tag{4.27}$$

$$a_z = a_z. \tag{4.28}$$

4.2.1 Brzina u cilindričnom sustavu

Položaj točke P dan je radijus-vektorom

$$\vec{r} = \rho\vec{\rho}_0 + z\vec{k}. \tag{4.29}$$

Brzinu točke P dobijemo deriviranjem vektora $\vec{r}$ po vremenu

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{\rho}_0 + \rho\dot{\vec{\rho}}_0 + \dot{z}\vec{k}. \tag{4.30}$$

Bitno je uočiti da jedinični vektori $\vec{\rho}_0$ i $\vec{\phi}_0$ mijenjaju smjer u prostoru pa i njih moramo derivirati. Najjednostavniji način je da ih raspišemo pomoću jediničnih vektora kartezijevog sustava

$$\vec{\rho}_0 = \cos\phi\vec{i} + \sin\phi\vec{j}, \tag{4.31}$$

$$\vec{\phi}_0 = -\sin\phi\vec{i} + \cos\phi\vec{j}. \tag{4.32}$$

Jedinični vektori kartezijevog sustava imaju fiksni smjer pa njihove vremenske derivacije iščezavaju. Derivacije jediničnih vektora $\vec{\rho}_0$ i $\vec{\phi}_0$ glase

$$\dot{\vec{\rho}}_0 = -\sin\phi\dot{\phi}\vec{i} + \cos\phi\dot{\phi}\vec{j} = \dot{\phi}\vec{\phi}_0, \tag{4.33}$$

$$\dot{\vec{\phi}}_0 = -\cos\phi\dot{\phi}\vec{i} - \sin\phi\dot{\phi}\vec{j} = -\dot{\phi}\vec{\rho}_0. \tag{4.34}$$

Sada deriviramo radijus-vektor $\vec{r}$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{\rho}_0 + \rho\dot{\vec{\rho}}_0 + \dot{z}\vec{k} = \dot{\rho}\vec{\rho}_0 + \rho\dot{\phi}\vec{\phi}_0 + \dot{z}\vec{k}. \tag{4.35}$$

Kinetička energija čestice u cilindričnim koordinatama

$$T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}\vec{\rho}_0 + \rho\dot{\phi}\vec{\phi}_0 + \dot{z}\vec{k}\right)^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right). \tag{4.36}$$

4.2.2 Ubrzanje u cilindričnom sustavu

Ubrzanje izračunamo tako da deriviramo brzinu

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\vec{\rho}_0 + \rho\dot{\phi}\vec{\phi}_0 + \dot{z}\vec{k}\right) = \ddot{\rho}\vec{\rho}_0 + \dot{\rho}\dot{\vec{\rho}}_0 + \dot{\rho}\dot{\phi}\vec{\phi}_0 + \rho\ddot{\phi}\vec{\phi}_0 + \rho\dot{\phi}\dot{\vec{\phi}}_0 + \ddot{z}\vec{k}. \tag{4.37}$$

Uvrstimo derivacije jediničnih vektora (4.33) i (4.34)

$$\ddot{\vec{r}} = \left[\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right]\vec{\rho}_0 + \left[2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right]\vec{\phi}_0 + \ddot{z}\vec{k}. \tag{4.38}$$

Jednadžba gibanja u cilindričnim koordinatama glasi

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = F_\rho\vec{\rho}_0 + F_\phi\vec{\phi}_0 + F_z\vec{k}, \tag{4.39}$$

a možemo je rastaviti po komponentama

$$m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right) = F_\rho, \tag{4.40}$$

$$m\left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right) = F_\phi, \tag{4.41}$$

$$m\ddot{z} = F_z. \tag{4.42}$$

4.2.3 Moment količine gibanja u cilindričnom sustavu

Primjenimo formulu za zakretni impuls

$$\vec{M} = m\vec{r}\times\vec{v} = m\begin{vmatrix} \vec{\rho}_0 & \vec{\phi}_0 & \vec{k} \\ \rho & 0 & z \\ \dot{\rho} & \rho\dot{\phi} & \dot{z} \end{vmatrix}, \tag{4.43}$$

a zatim izračunamo determinantu

$$\vec{M} = -mz\rho\dot{\phi}\vec{\rho}_0 + m\left(z\dot{\rho} - \rho\dot{z}\right)\vec{\phi}_0 + m\rho^2\dot{\phi}\vec{k}. \tag{4.44}$$

Ako se gibanje odvija u xy ravnini, preostaje samo zadnji član

$$\vec{M} = m\rho^2\dot{\phi}\vec{k}. \tag{4.45}$$

4.3 Sferni sustav

Položaj točke P u sfernom sustavu definiramo pomoću tri koordinate

1. koordinata r: udaljenost točke P od ravnine ishodišta,
2. koordinata θ: kut između osi z i spojnice ishodišta s točkom P,
3. koordinata ϕ: kut između osi x i spojnice ishodišta s projekcijom točke P na ravninu xy.

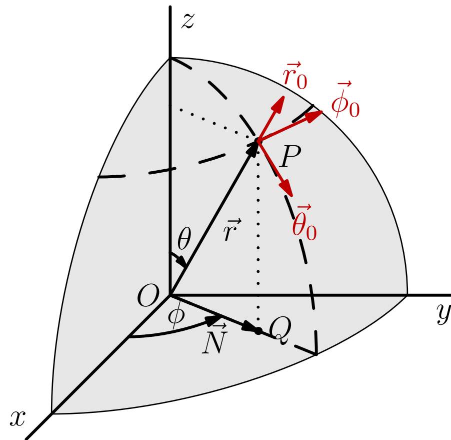
Kut θ se mijenja u intervalu $[0, \pi]$, dok se kut ϕ mijenja u intervalu $[0, 2\pi\rangle$. Smjer promjene svake koordinate definira odgovarajući jedinični vektor u sfernom sustavu. Jedinični vektori sfernog sustava $\vec{r}_0$, $\vec{\theta}_0$, $\vec{\phi}_0$ čine desni ortonormirani sustav. To znači da:

1. su međusobno ortogonalni: $\vec{r}_0 \cdot \vec{\theta}_0 = \vec{r}_0 \cdot \vec{\phi}_0 = \vec{\theta}_0 \cdot \vec{\phi}_0 = 0$,
2. su normirani: $\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0 = \vec{\theta}_0 \cdot \vec{\theta}_0 = \vec{\phi}_0 \cdot \vec{\phi}_0 = 1$,
3. za vektorske produkte vrijedi: $\vec{r}_0 = \vec{\theta}_0 \times \vec{\phi}_0, \quad \vec{\theta}_0 = \vec{\phi}_0 \times \vec{r}_0, \quad \vec{\phi}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{\theta}_0$.

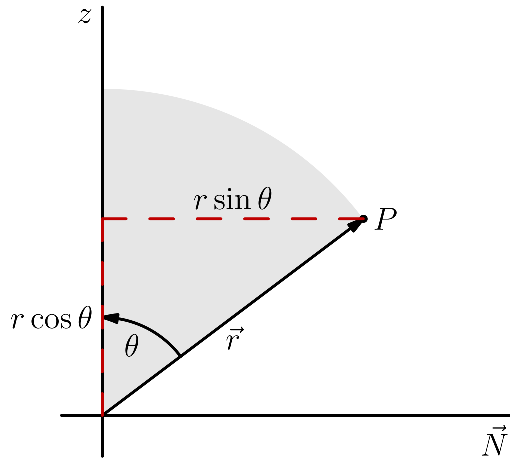
Položaj točke P određen je radijus-vektorom

$$\vec{r} = r\vec{r}_0. \tag{4.46}$$

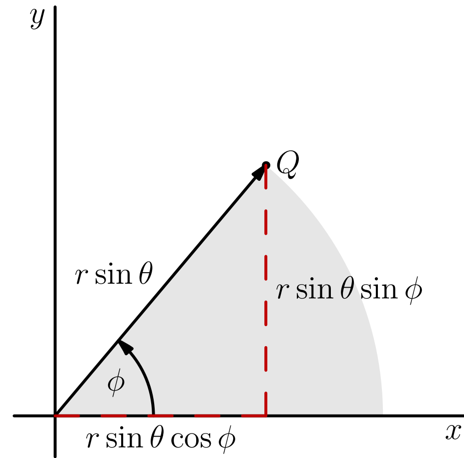
Želimo izvesti vezu sfernih i kartezijevih koordinata. Iz pravokutnog trokuta na sl. 4.7 slijedi



Slika 4.6: Koordinate i jedinični vektori u sfernom sustavu.



Slika 4.7: Ravnina u kojoj leže os z i radijus-vektor točke P.



Slika 4.8: Projekcija točke P na ravninu xy.

- projekcija dužine r na os z iznosi $r\cos\theta$
- projekcija dužine r na ravninu xy iznosi $r\sin\theta$

Projekciju dužine r na ravninu xy (sl. 4.8) možemo dalje rastaviti na x i y komponente

- projekcija dužine $r\sin\theta$ na os x iznosi $r\sin\theta\cos\phi$
- projekcija dužine $r\sin\theta$ na os y iznosi $r\sin\theta\sin\phi$

Dakle, veza Kartezijevih i sfernih koordinata glasi

$$\left.\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\ \phi = \arctan y/x \end{array}\right. \qquad (4.47)$$

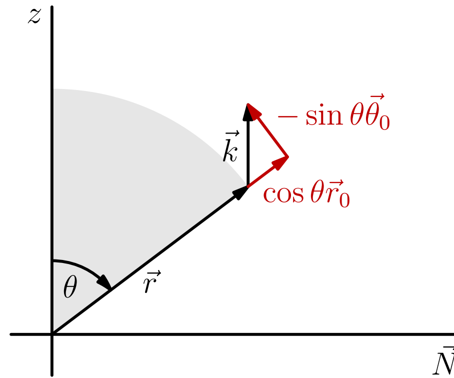
Kod operacija s vektorima vrijede iste formule kao u svakom desnom ortonormiranom sustavu.

- Zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_r+b_r)\,\vec{r}_0 + (a_\theta+b_\theta)\,\vec{\theta}_0 + (a_\phi+b_\phi)\,\vec{\phi}_0. \qquad (4.48)$$

- Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_r b_r + a_\theta b_\theta + a_\phi b_\phi. \qquad (4.49)$$



Slika 4.9: Rastavljanje vektora $\vec{k}$ na jedinične vektore sfernog sustava $\vec{\theta}_0$ i $\vec{r}_0$.

- Vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{r}_0 & \vec{\theta}_0 & \vec{\phi}_0 \\ a_r & a_\theta & a_\phi \\ b_r & b_\theta & b_\phi \end{vmatrix}. \tag{4.50}$$

U sljedećem koraku ćemo raspisati jedinične vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ pomoću jediničnih vektora sfernog sustava $\vec{r}_0$, $\vec{\theta}_0$ i $\vec{\phi}_0$. Najjednostavniji slučaj je jedinični vektor $\vec{k}$ koji direktno možemo rastaviti na jedinične vektore $\vec{\theta}_0$ i $\vec{r}_0$. Sa sl. 4.9 možemo zaključiti

- projekcija vektora $\vec{k}$ na smjer $\vec{r}_0$ iznosi $\cos\theta$
- projekcija vektora $\vec{k}$ na smjer $\vec{\theta}_0$ iznosi $-\sin\theta$

Raspis jediničnog vektora $\vec{k}$ u bazi sfernog koordinatnog sustava glasi

$$\vec{k} = \cos\theta\vec{r}_0 - \sin\theta\vec{\theta}_0. \tag{4.51}$$

Da bi izračunali projekcije vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$, prvo ćemo izračunati projekcije vektora $\vec{N}_0$. Sa sl. 4.10 pročitamo

- projekcija vektora $\vec{N}_0$ na smjer $\vec{r}_0$ iznosi $\sin\theta$
- projekcija vektora $\vec{N}_0$ na smjer $\vec{\theta}_0$ iznosi $\cos\theta$

Raspis jediničnog vektora $\vec{N}_0$ u bazi sfernog koordinatnog sustava glasi

$$\vec{N}_0 = \sin\theta\vec{r}_0 + \cos\theta\vec{\theta}_0. \tag{4.52}$$

Sada rastavljamo vektor $\vec{i}$ na vektore $\vec{N}_0$ i $\vec{\phi}_0$. Sa sl. 4.11 možemo zaključiti

- projekcija vektora $\vec{i}$ na smjer $\vec{N}_0$ iznosi $\cos\phi$
- projekcija vektora $\vec{i}$ na smjer $\vec{\phi}_0$ iznosi $-\sin\phi$

Jedinični vektor $\vec{i}$ raspišemo pomoću vektora $\vec{N}_0$ i $\vec{\phi}_0$

$$\vec{i} = \cos\phi\vec{N}_0 - \sin\phi\vec{\phi}_0, \tag{4.53}$$

a zatim uvrstimo rastav jediničnog vektora $\vec{N}_0$ (4.52)

$$\vec{i} = \cos\phi\sin\theta\vec{r}_0 + \cos\phi\cos\theta\vec{\theta}_0 - \sin\phi\vec{\phi}_0. \tag{4.54}$$

Preostalo nam je još rastaviti vektor $\vec{j}$ na vektore $\vec{N}_0$ i $\vec{\phi}_0$. Sa sl. 4.12 možemo zaključiti

- projekcija vektora $\vec{j}$ na smjer $\vec{N}_0$ iznosi $\sin\phi$
- projekcija vektora $\vec{j}$ na smjer $\vec{\phi}_0$ iznosi $\cos\phi$

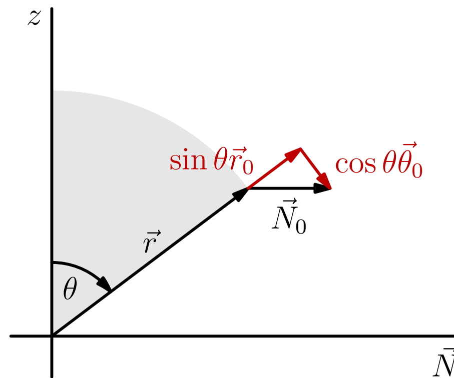
Jedinični vektor $\vec{j}$ raspišemo pomoću vektora $\vec{N}_0$ i $\vec{\phi}_0$

$$\vec{j} = \sin\phi\vec{N}_0 + \cos\phi\vec{\phi}_0, \tag{4.55}$$

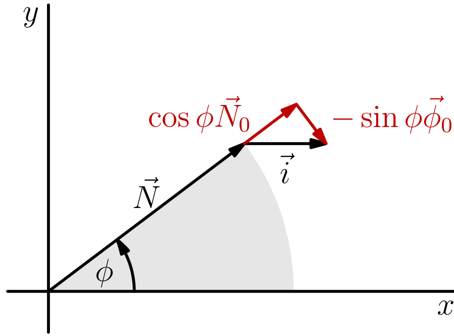
a zatim uvrstimo jedn. (4.52)

$$\vec{j} = \sin\phi\sin\theta\vec{r}_0 + \sin\phi\cos\theta\vec{\theta}_0 + \cos\phi\vec{\phi}_0. \tag{4.56}$$

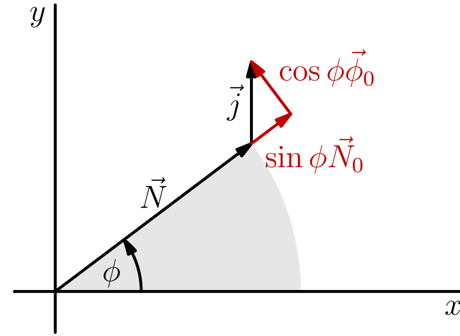
U tablici 4.3 sažeto navodimo vrijednosti skalarnih produkata jediničnih vektora Kartezijevog i sfernog sustava. Koristeći tablicu 4.3, možemo izraziti komponente vektora u Kartzijevom sustavu pomoću komponenti istog vektora u sfernom sustavu.



Slika 4.10: Rastavljanje vektora $\vec{N}_0$ na jedinične vektore sfernog sustava $\vec{\theta}_0$ i $\vec{r}_0$.



Slika 4.11: Ravnina u kojoj leže os z i radijus-vektor točke P.



Slika 4.12: Projekcija točke P na ravninu xy.

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{r}_0$	$\sin\theta\cos\phi$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta$
$\vec{\theta}_0$	$\cos\theta\cos\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$-\sin\theta$
$\vec{\phi}_0$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0

Tablica 4.2: Vrijednosti skalarnih produkata jediničnih vektora sfernog i Kartezijevog sustava.

$$a_r = \vec{a}\cdot\vec{r}_0 = a_x(\vec{i}\cdot\vec{r}_0) + a_y(\vec{j}\cdot\vec{r}_0) + a_z(\vec{k}\cdot\vec{r}_0) \tag{4.57}$$
$$a_r = a_x\sin\theta\cos\phi + a_y\sin\theta\sin\phi + a_z\cos\theta \tag{4.58}$$

$$a_\theta = \vec{a}\cdot\vec{\theta}_0 = a_x(\vec{i}\cdot\vec{\theta}_0) + a_y(\vec{j}\cdot\vec{\theta}_0) + a_z(\vec{k}\cdot\vec{\theta}_0) \tag{4.59}$$
$$a_\theta = a_x\cos\theta\cos\phi + a_y\cos\theta\sin\phi - a_z\sin\theta \tag{4.60}$$

$$a_\phi = \vec{a}\cdot\vec{\phi}_0 = a_x(\vec{i}\cdot\vec{\phi}_0) + a_y(\vec{j}\cdot\vec{\phi}_0) + a_z(\vec{k}\cdot\vec{\phi}_0) \tag{4.61}$$
$$a_\phi = -a_x\sin\phi + a_y\cos\phi \tag{4.62}$$

Naravno, možemo napisati i inverzne relacije

$$a_x = \vec{a}\cdot\vec{i} = a_r(\vec{r}_0\cdot\vec{i}) + a_\theta(\vec{\theta}_0\cdot\vec{i}) + a_\phi(\vec{\phi}_0\cdot\vec{i}) \tag{4.63}$$
$$a_x = a_r\sin\theta\cos\phi + a_\theta\cos\theta\cos\phi - a_\phi\sin\phi \tag{4.64}$$

$$a_y = \vec{a}\cdot\vec{j} = a_r(\vec{r}_0\cdot\vec{j}) + a_\theta(\vec{\theta}_0\cdot\vec{j}) + a_\phi(\vec{\phi}_0\cdot\vec{j}) \tag{4.65}$$
$$a_y = a_r\sin\theta\sin\phi + a_\theta\cos\theta\sin\phi + a_\phi\cos\phi \tag{4.66}$$

$$a_z = \vec{a}\cdot\vec{k} = a_r(\vec{r}_0\cdot\vec{k}) + a_\theta(\vec{\theta}_0\cdot\vec{k}) + a_\phi(\vec{\phi}_0\cdot\vec{k}) \tag{4.67}$$
$$a_z = a_r\cos\theta - a_\theta\sin\theta. \tag{4.68}$$

4.3.1 Brzina u sfernom sustavu

Položaj točke P dan je radijus-vektorom

$$\vec{r} = r\vec{r}_0. \tag{4.69}$$

Brzina čestice je vremenska derivacija radijus-vektora

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\vec{r}}_0, \tag{4.70}$$

pri čemu jedinični vektor $\vec{r}_0$ mijenja smjer u prostoru pa i njega moramo derivirati. Najjednostavnije je raspisati ga pomoću jediničnih vektora kartezijevog sustava

$$\vec{r}_0 = \sin\theta\cos\phi\vec{i} + \sin\theta\sin\phi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}, \tag{4.71}$$

koji imaju fiksni smjer pa njihove vremenske derivacije iščezavaju. Deriviramo jedinični vektor $\vec{r}_0$ po vremenu

$$\dot{\vec{r}}_0 = \left[\cos\theta\cos\phi\vec{i} + \cos\theta\sin\phi\vec{j} - \sin\theta\vec{k}\right]\dot{\theta} + \sin\theta\left[-\sin\phi\vec{i} + \cos\phi\vec{j}\right]\dot{\phi}. \tag{4.72}$$

U uglatim zagradama prepoznamo jedinične vektore sfernog sustava u Kartezijevim koordinatama

$$\dot{\vec{r}}_0 = \dot{\theta}\vec{\theta}_0 + \sin\theta\dot{\phi}\vec{\phi}_0. \tag{4.73}$$

Uvrstimo prethodnu jednakost u izraz za brzinu (4.70)

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{\phi}_0. \tag{4.74}$$

Kinetička energija u sfernim koordinatama glasi

$$T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2}\left[\dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{\phi}_0\right]^2 = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right]. \tag{4.75}$$

4.3.2 Ubrzanje u sfernom sustavu

Ubrzanje točke P dobijemo tako da deriviramo brzinu

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt}\left[\dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{\phi}_0\right] \\ &= \ddot{r}\vec{r}_0 + \dot{r}\dot{\vec{r}}_0 + \dot{r}\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + r\ddot{\theta}\vec{\theta}_0 + r\dot{\theta}\dot{\vec{\theta}}_0 \\ &+ \dot{r}\sin\theta\dot{\phi}\vec{\phi}_0 + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\vec{\phi}_0 + \dot{r}\sin\theta\ddot{\phi}\vec{\phi}_0 + r\sin\theta\dot{\phi}\dot{\vec{\phi}}_0.\end{aligned} \tag{4.76}$$

Potrebne su nam derivacije jediničnih vektora $\vec{\theta}_0$ i $\vec{\phi}_0$. Prvo ih raspišemo pomoću jediničnih vektora kartezijevog sustava

$$\vec{\theta}_0 = \cos\theta\cos\phi\vec{i} + \cos\theta\sin\phi\vec{j} - \sin\theta\vec{k}, \tag{4.77}$$

$$\vec{\phi}_0 = -\sin\phi\vec{i} + \cos\phi\vec{j}. \tag{4.78}$$

Deriviramo vektor $\vec{\theta}_0$

$$\dot{\vec{\theta}}_0 = -\sin\theta\dot{\theta}\cos\phi\vec{i} - \cos\theta\sin\phi\dot{\phi}\vec{i} - \sin\theta\dot{\theta}\sin\phi\vec{j} + \cos\theta\cos\phi\dot{\phi}\vec{j} - \cos\theta\dot{\theta}\vec{k} \tag{4.79}$$

$$\dot{\vec{\theta}}_0 = -\left[\sin\theta\cos\phi\vec{i}\sin\theta\sin\phi\vec{j}\cos\theta\vec{k}\right]\dot{\theta} + \cos\theta\left[-\sin\phi\vec{i} + \cos\phi\vec{j}\right]\dot{\phi}. \tag{4.80}$$

U prethodnom izrazu prepoznamo jedinične vektore $\vec{r}_0$ i $\vec{\phi}_0$ u Kartezijevim koordinatama

$$\dot{\vec{\theta}}_0 = -\dot{\theta}\vec{r}_0 + \cos\theta\dot{\phi}\vec{\phi}_0. \tag{4.81}$$

Sada deriviramo vektor $\vec{\phi}_0$

$$\dot{\vec{\phi}}_0 = -\cos\phi\dot{\phi}\vec{i} - \sin\phi\dot{\phi}\vec{j} \tag{4.82}$$

$$\dot{\vec{\phi}}_0 = -\cos\phi\left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\right]\dot{\phi}\vec{i} - \sin\phi\left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\right]\dot{\phi}\vec{j}. \tag{4.83}$$

Izrazimo li jedinične vektore $\vec{i}$ i $\vec{j}$ pomoću jediničnih vektora sfernog sustava doći ćemo do sljedećeg zaključka

$$\dot{\vec{\phi}}_0 = -\sin\theta\dot{\phi}\vec{r}_0 - \cos\theta\dot{\phi}\vec{\theta}_0. \tag{4.84}$$

Konačno, ubzanje u sfernom sustavu

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_0\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) \tag{4.85}$$

$$+\,\vec{\theta}_0\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right) \tag{4.86}$$

$$+\,\vec{\phi}_0\left(2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + 2r\dot{\theta}\cos\theta\dot{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi}\right). \tag{4.87}$$

Jednadžba gibanja u sfernom sustavu glasi

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = F_r\vec{r}_0 + F_\theta\vec{\theta}_0 + F_\phi\vec{\phi}_0, \tag{4.88}$$

i predstavlja tri skalarne jednadžbe

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) = F_r, \tag{4.89}$$

$$m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right) = F_\theta, \tag{4.90}$$

$$m\left(2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + 2r\dot{\theta}\cos\theta\dot{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi}\right) = F_\phi. \tag{4.91}$$

4.3.3 Moment količine gibanja u sfernim koordinatama

Primjenimo formulu za zakretni impuls

$$\vec{M} = m\vec{r} \times \vec{v} = m \begin{vmatrix} \vec{r}_0 & \vec{\theta}_0 & \vec{\phi}_0 \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r\sin\theta\dot{\phi} \end{vmatrix}, \quad (4.92)$$

a zatim zračunamo determinantu

$$\vec{M} = -mr^2 \left[\sin\theta\dot{\phi}\vec{\theta}_0 - \dot{\theta}\vec{\phi}_0 \right]. \quad (4.93)$$

A Diferencijalne jednadžbe

A.1 Osnovni pojmovi

Jednadžbu koja sadrži derivacije nepoznate funkcije zovemo diferencijalna jednadžba. Red difrencijalne jednadžbe jednak je najvišem stupnju derivacije u jednadžbi. Rješenje diferencijalne jednadžbe je bilo koja funkcija koja jednažbu svodi na identitet.
Primjer:

$$\frac{dy}{dx} = 2y \tag{A.1}$$

Jedn. (A.1) je diferencijalna jednadžba prvog reda jer je najviši red derivacije funkcije y jedan. Rješenje ove jednažbe je funkcija $y = ce^{2x}$, gdje je c bilo koja konstanta. Uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja u jedn. (A.1) dolazimo do identiteta

$$2ce^{2x} = 2ce^{2x}. \tag{A.2}$$

Primjer:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x \tag{A.3}$$

Jedn. (A.3) je diferencijalna jednažba drugog reda jer je najviši red derivacije funkcije y jednak dva. Rješenje ove jednadžbe je funkcija

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2x + 3. \tag{A.4}$$

Uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja u jedn. (A.3) dolazimo do identiteta

$$c_1e^x + 4c_2e^{2x} - 3c_1e^x - 6c_2e^{2x} - 6 + 2c_1e^x + 2c_2e^{2x} + 4x + 6 = 4x. \tag{A.5}$$

U prethodnim primjerima smo nezavisnu varijablu označili s x, a zavisnu s y, ali možemo koristiti i bile koje druge oznake. Diferencijalne jednadžbe koje uključuju samo jednu nezavisnu varijablu zovemo obične, dok jednadžbe s više nezavisnih varijabli zovemo parcijalne diferencijalne jednadžbe. Opće rješenje diferencijalne jednadžbe n-tog stupnja sadrži n nezavisnih konstanti integracije. Ako konstantama dodijelimo neke točno određene vrijednosti dolazimo do partikularnog rješenja diferencijalne jednadžbe.
Primjer: Opet promatramo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x. \tag{A.6}$$

Opće rješenje ove jednadžbe je funkcija

$$y_{gen} = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2x + 3, \tag{A.7}$$

koja sadrži dvije konstante integracije c_1 i c_2. Ako umjesto konstanti c_1 i c_2 uvrstimo neke određene vrijednosti (npr. $c_1 = 5$ i $c_2 = -3$)

$$y_{part} = 5e^x - 3e^{2x} + 2x + 3, \tag{A.8}$$

dolazimo do jednog od beskonačno mnogo partikularnih rješenja.

A.2 Diferencijalne jednadžbe prvog reda

A.2.1 Separacija varijabli

Ako diferencijalnu jednadžbu prvog reda možemo napisati u obliku

$$F(x)dx + G(y)dy = 0, \tag{A.9}$$

kažemo da je jednadžba separabilna. Do općeg rješenja dolazimo integracijom

$$\int F(x)dx + \int G(y)dy = c, \tag{A.10}$$

pri čemu je c konstanta integracije.

Primjer A.1

Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(x + xy^2)dx + (y + x^2y)dy = 0, \tag{A.11}$$

kao i partikularno rješenje za koje vrijedi $y(x = 1) = 2$.

Jednadžbu napišemo u obliku

$$x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0, \tag{A.12}$$

i podijelimo je s $(1 + x^2)(1 + y^2)$. Rezultat je separabilna diferencijalna jednadžba

$$\frac{xdx}{1 + x^2} + \frac{ydy}{1 + y^2} = 0. \tag{A.13}$$

Do općeg rješenja dolazimo integracijom

$$\int \frac{xdx}{1 + x^2} + \int \frac{ydy}{1 + y^2} = c. \tag{A.14}$$

Integrale riješimo koristeći supstitucije $u = x^2$ i $v = y^2$

$$\frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + \frac{1}{2} \ln (1 + y^2) = c. \tag{A.15}$$

Iskoristimo relaciju $\ln a + \ln b = \ln (ab)$

$$\frac{1}{2} \ln (1 + x^2)(1 + y^2) = c \Longrightarrow (1 + x^2)(1 + y^2) = e^{2c} \equiv C. \tag{A.16}$$

Traženo opće rješenje glasi

$$(1 + x^2)(1 + y^2) = C, \tag{A.17}$$

pri čemu je C konstanta integracije koju možemo izračunati koristeći uvjet zadan u tekstu zadatka

$$y(x = 1) = 2 \Longrightarrow C = (1 + 1)(1 + 4) = 10. \tag{A.18}$$

Dakle, partikularno rješenje glasi

$$(1 + x^2)(1 + y_p^2) = 10. \tag{A.19}$$

A.2.2 Linearne jednadžbe

Linearna diferencijalna jednadžba prvog reda ima sljedeći oblik

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{A.20}$$

Pomnožimo li obje strane s faktorom $e^{\int P(x)dx}$, diferencijalna jednadžba svela se na

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{\int P(x)dx}\right] = Q(x)e^{\int P(x)dx}. \tag{A.21}$$

Do općeg rješenja dolazimo integracijom

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c, \tag{A.22}$$

odnosno

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + ce^{-\int P(x)dx}. \tag{A.23}$$

Primjer A.2

Nađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x^3 + x, \tag{A.24}$$

za koje vrijedi $y(x = 2) = 0$.

Radi se o linearnoj diferencijalnoj jednadžbi prvog reda

$$P(x) = 2x \quad \text{i} \quad Q(x) = x^3 + x. \tag{A.25}$$

Prvo moramo izračunati faktor

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}. \tag{A.26}$$

Uvrstimo faktor u opće rješenje (A.23)

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + ce^{-\int P(x)dx}, \tag{A.27}$$

te u sljedećem koraku rješavamo integral

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int (x^2 + 1)e^{x^2}xdx. \tag{A.28}$$

Koristimo supstituciju $u = x^2 \to du = 2xdx$

$$\int (x^2 + 1)e^{x^2}xdx = \frac{1}{2}\int ue^u du + \frac{1}{2}\int e^u du. \tag{A.29}$$

Preostali integrali su elementarni

$$\int (x^3 + x)e^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + \frac{1}{2}e^{x^2} = \frac{1}{2}x^2e^{x^2}. \tag{A.30}$$

Opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + ce^{-x^2}. \tag{A.31}$$

Još trebamo naći partikularno rješenje za koje vrijedi $y(x = 0) = 2$. Zadani uvjet fiksira konstantu c

$$y(x = 0) = c \Longrightarrow c = 2. \tag{A.32}$$

Traženo partikularno rješenje glasi

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2e^{-x^2}. \tag{A.33}$$

A.2.3 Egzaktne jednadžbe

Diferencijalnu jednadžbu

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{A.34}$$

zovemo egzaktna diferencijalna jednadžba ako $Mdx+Ndy$ možemo izraziti kao egzaktni diferencijal funkcije $U(x,y)$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dU(x,y) = 0. \tag{A.35}$$

Rješenje jednadžbe glasi

$$U(x,y) = c. \tag{A.36}$$

Nužan i dovoljan uvjet da bi jednadžba bila egzaktna glasi

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{A.37}$$

Primjer A.3

Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\left(3x^2 + y\cos x\right) dx + \left(\sin x - 4y^3\right) dy = 0. \tag{A.38}$$

Usporedba zadane jednadžbe s jedn. (A.34) daje

$$M(x,y) = 3x^2 + y\cos x \quad \text{i} \quad N(x,y) = \sin x - 4y^3. \tag{A.39}$$

Izračunamo parcijalne derivacije iz uvjeta (A.37)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{A.40}$$

Jednadžba je egzaktna pa postoji funkcija $U(x,y)$ t.d.

$$\left(3x^2 + y\cos x\right) dx + \left(\sin x - 4y^3\right) dy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy. \tag{A.41}$$

Usporedbom koeficijenata uz diferencijale dx i dy dolazimo do dvije jednadžbe

$$3x^2 + y\cos x = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{A.42}$$

$$\sin x - 4y^3 = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{A.43}$$

Integriramo jedn. (A.42)

$$U(x,y) = x^3 + y\sin x + F(y) + c_1, \tag{A.44}$$

gdje je $F(y)$ proizvoljna funkcija koja ovisi samo o y. Zatim rješenje $U(x,y)$ uvrstimo u jedn. (A.43)

$$\sin x - 4y^3 = \sin x + F'(y) \Longrightarrow F(y) = -y^4 + c. \tag{A.45}$$

Dakle, funkcija $U(x,y)$ glasi

$$U(x,y) = x^3 + y\sin x - y^4 + c. \tag{A.46}$$

Diferencijalna jednadžba svela se na oblik

$$d\left(x^3 + y\sin x - y^4\right) = 0, \tag{A.47}$$

koji je trivijalno rješiti

$$x^3 + y\sin x - y^4 = c. \tag{A.48}$$

Pritom je c konstanta integracije.

A.2.4 Homogene jednadžbe

Ako diferencijalna jednadžba ima oblik

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right), \tag{A.49}$$

zovemo je homogena diferencijalna jednadžba i možemo je riješiti transformacijom $y = vx$. Jednadžba poprima oblik

$$= F(v) \Longrightarrow x\frac{dv}{dx} = F(v) - v \Longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v},$$

a integriranjem jednadžbe dolazimo do općeg rješenja

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{F(v) - v} + c. \tag{A.50}$$

Primjer A.4

Nađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\frac{dy}{dx} = e^{y/x} + \frac{y}{x}. \tag{A.51}$$

Desna strana jednadžbe ovisi samo o y/x. Radi se o homogenoj diferencijalnoj jednadžbi pa radimo transformaciju $y = vx$

$$v + x\frac{dv}{dx} = e^v + v \Longrightarrow x\frac{dv}{dx} = e^v. \tag{A.52}$$

Separiramo prethodnu jednadžbu

$$\frac{dx}{x} = e^{-v}dv \Longrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int e^{-v}dv + c. \tag{A.53}$$

Opće rješenje zadane jednadžbe

$$\ln x = -e^{-v} + c \Longrightarrow \ln x + e^{-y/x} = c. \tag{A.54}$$

A.3 Diferencijalne jednadžbe višeg reda

A.3.1 Neposredna integracija

Pretpostavimo da diferencijalna jednadžba ima sljedeći oblik

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x). \tag{A.55}$$

Integriramo jednadžbu prvi put

$$\int \frac{d^n y}{dx^n} dx = \int f(x) dx \Longrightarrow \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + C_1 = \int f(x) dx. \tag{A.56}$$

Integriramo jednadžbu drugi put

$$\int \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} dx + C_1 x = \iint f(x) dx. \tag{A.57}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + C_1 x + C_2 = \iint f(x) dx. \tag{A.58}$$

Postupak ponovimo ukupno n puta

$$y = \underbrace{\int \int \cdots \int f(x) dx}_{\text{n puta}} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \cdots + C_n. \tag{A.59}$$

Da bi riješili jednadžbu moramo n puta integrirati funkciju $f(x)$.

Primjer A.5

Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' = \frac{1}{x}. \tag{A.60}$$

Jednadžba ima oblik prikladan za neposredno integriranje. Integriramo je prvi put

$$y' + C_1 = \int \frac{dx}{x} = \ln x, \tag{A.61}$$

a zatim i drugi put

$$y + C_1 x + C_2 = \int \ln x dx = x \ln x - x. \tag{A.62}$$

Opće rješenje jednadžbe glasi

$$y_{gen} = x \ln x - x - C_1 x - C_2. \tag{A.63}$$

A.3.2 Snižavanje reda jednadžbe

Red jednadžbe možemo sniziti ako

- jednadžba ne ovisi eksplicitno o y ili
- jednadžba ne ovisi eksplicitno o x

Promotrimo prvi slučaj na primjeru diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, \frac{dy}{dx}\right). \tag{A.64}$$

Napravimo supstituciju

$$\frac{dy}{dx} = v, \tag{A.65}$$

čime smo problem sveli na rješavanje diferencijalne jednadžbe prvog reda

$$\frac{dv}{dx} = F\left(x, v\right). \tag{A.66}$$

Drugi slučaj snižavanja reda jednadžbe također možemo ilustrirati na primjeru jednadžbe drugog reda

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(y, \frac{dy}{dx}\right). \tag{A.67}$$

Napravimo supstituciju

$$\frac{dy}{dx} = v. \tag{A.68}$$

Lijeva strana jednadžbe poprima oblik

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy}. \tag{A.69}$$

Time smo problem opet sveli na rješavanje diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$v\frac{dv}{dy} = F\left(y, v\right). \tag{A.70}$$

U oba slučaja smo snizili red jednadžbe za jedan stupanj.

Primjer A.6

Nađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$xy'' + 2y' = x^2. \tag{A.71}$$

Na desnoj strani nedostaje y pa koristimo supstituciju $y' = v$. Time smo snizili red jednadžbe

$$x\frac{dv}{dx} + 2v = x^2 \Longrightarrow \frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = x. \tag{A.72}$$

Dalje rješavamo linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda (A.20). Pritom vrijedi

$$P(x) = \frac{2}{x} \quad \text{i} \quad Q(x) = x. \tag{A.73}$$

Faktor integriranja glasi

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int 2dx/x} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2. \tag{A.74}$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe glasi

$$v(x) = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c_1 e^{-\int P(x)dx}. \tag{A.75}$$

Još trebamo izračunati integral

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int x \cdot x^2 dx = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}. \tag{A.76}$$

Uvrstimo dobijeni integral u rješenje (A.75)

$$v(x) = \frac{1}{x^2}\frac{x^4}{4} + c_1\frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{4} + \frac{c_1}{x^2}. \tag{A.77}$$

Da bi došli do tražene funkcije $y(x)$, moramo integrirati $v(x)$

$$y(x) = \int v(x)dx = \frac{x^3}{12} - \frac{c_1}{x} + c_2. \tag{A.78}$$

Primjer A.7

Nađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$yy'' + (y')^2 = 0 \tag{A.79}$$

Jednadžba ne ovisi eksplicitno o x pa koristimo supstituciju

$$y' = v \Longrightarrow y'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy}. \tag{A.80}$$

Snizili smo red jednadžbe

$$yv\frac{dv}{dy} + v^2 = 0 \Longrightarrow v\left(y\frac{dv}{dy} + v\right) = 0. \tag{A.81}$$

Postoje dva rješenja

$$v_1 = 0 \quad \text{i} \quad y\frac{dv_2}{dy} + v_2 = 0. \tag{A.82}$$

Druga jednadžba daje

$$y\frac{dv_2}{dy} + v_2 = 0 \Longrightarrow \frac{dv_2}{v_2} + \frac{dy}{y} = 0. \tag{A.83}$$

Integriramo jednadžbu

$$\ln v_2 + \ln y = c \Longrightarrow \ln(v_2 y) = c \Longrightarrow v_2 = \frac{c_1}{y}. \tag{A.84}$$

Vratimo se supstituciji $v = dy/dx$. Prvo rješenje

$$v_1 = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow y_1 = C, \tag{A.85}$$

i drugo rješenje

$$v_2 = \frac{c_1}{y} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{y}. \tag{A.86}$$

Pomnožimo prethodnu jednadžbu s y

$$y\frac{dy}{dx} = c_1 \Longrightarrow \frac{dy^2}{2dx} = c_1 \Longrightarrow y_2^2(x) = Ax + B. \tag{A.87}$$

Rješenje y_1 je očito sadržano u rješenju y_2 pa opće rješenje ima oblik

$$y(x) = \sqrt{Ax + B}. \tag{A.88}$$

A.3.3 Linearne diferencijalne jednadžbe

Linearna diferencijalna jednadžba drugog reda ima oblik

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x). \tag{A.89}$$

Prvi korak u rješavanju ovakve jednadžbe je da napišemo pripadnu homogenu jednadžbu ($R(x) = 0$)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0. \tag{A.90}$$

Označimo s y_h opće rješenje homogene jednadžbe, a s y_p bilo koje partikularno rješenje nehomogene jednadžbe (A.89). Opće rješenje je suma općeg rješenja homogene jednadžbe y_h i bilo kojeg partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe y_p

$$y = y_h + y_p. \tag{A.91}$$

A.3.4 Linearne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

Rješenje homogene jednadžbe je jednostavno ako su koeficijenti jednadžbe $P(x)$ i $Q(x)$ konstante

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0. \tag{A.92}$$

Pretpostavimo rješenje oblika $y = e^{\alpha x}$. Konstantu α moramo izračunati tako da rješenje uvrstimo u jedn. (A.92)

$$\alpha^2 e^{\alpha x} + A\alpha e^{\alpha x} + Be^{\alpha x} = 0 \Longrightarrow \alpha^2 + A\alpha + B = 0. \tag{A.93}$$

Kvadratna jednadžba ima dva rješenja

$$\alpha_{1,2} = -\frac{A}{2} \pm \frac{\sqrt{A^2 - 4B}}{2A}. \tag{A.94}$$

Ovisno o parametrima A i B, moguća su tri tipa rješenja.
Prvi slučaj: $A^2 - 4B > 0$
Korijeni (A.94) su realni i različiti. Dva linearno nezavisna rješenja diferencijalne jednadžbe (A.92) glase

$$y_1 = e^{\alpha_1 x} \quad \text{i} \quad y_2 = e^{\alpha_2 x}. \tag{A.95}$$

Opće rješenje je njihova linearna kombinacija

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}. \tag{A.96}$$

Drugi slučaj: $A^2 - 4B = 0$
Korijeni (A.94) su realni i jednaki pa dva linearno nezavisna rješenja diferencijalne jednadžbe (A.92) glase

$$y_1 = e^{\alpha x} \quad \text{i} \quad y_2 = x e^{\alpha x}. \tag{A.97}$$

Opće rješenje je njihova linearna kombinacija

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x} \tag{A.98}$$

Treći slučaj: $A^2 - 4B < 0$
Korijeni (A.94) su kompleksno konjugirani

$$\alpha_1 = a + bi \quad \text{i} \quad \alpha_2 = a - bi. \tag{A.99}$$

Dva linearno nezavisna rješenja diferencijalne jednadžbe (A.92) glase

$$y_1 = e^{\alpha_1 x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \tag{A.100}$$

$$y_2 = e^{\alpha_2 x} = e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax} (\cos bx - i \sin bx) . \tag{A.101}$$

Opće rješenje je njihova linearna kombinacija koju možemo napisati u sljedećem obliku

$$y = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) . \tag{A.102}$$

Vratimo se općoj jednadžbi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + A \frac{dy}{dx} + By = R(x). \tag{A.103}$$

Opće rješenje je suma općeg rješenja homogene jednadžbe i bilo kojeg partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe.

Primjer A.8

Nađite rješenje jednadžbe

$$y'' + 4y = 0, \tag{A.104}$$

koje zadovoljava uvjete $y(x = 0) = 0$ i $y'(x = 0) = 2$.

Jednadžba je homogena, linearna i ima konstantne koeficijente. Dva linearno nezavisna rješenja glase

$$y_1 = \sin 2x \quad \text{i} \quad y_2 = \cos 2x. \tag{A.105}$$

Opće rješenje je linearna kombinacija

$$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x. \tag{A.106}$$

Pritom konstante c_1 i c_2 fiksiramo uvjetima $y(x = 0) = 0$ i $y'(x = 0) = 2$.

- prvi uvjet: $y(x = 0) = 0$

$$y(x = 0) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0 \tag{A.107}$$

- drugi uvjet: $y'(x = 0) = 2$

$$y'(x = 0) = 2c_1 = 2 \Longrightarrow c_1 = 1 \tag{A.108}$$

Rješenje koje zadovoljava zadane uvjete

$$y = \sin 2x. \tag{A.109}$$

Primjer A.9

Nađite opće rješenje jednadžbe

$$y'' + y' - 2y = 8\sin 2x. \tag{A.110}$$

Jednadžba je nehomogena pa je opće rješenje je suma općeg rješenja pripadne homogene jednadžbe i bilo kojeg partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe. Pripadna homogena jednadžba glasi

$$y'' + y' - 2y = 0. \tag{A.111}$$

Pretpostavimo rješenje oblika $y = e^{\alpha x}$

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+8}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}. \tag{A.112}$$

Rješenja kvadratne jednadžbe su realna i različita

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{i} \quad \alpha_2 = -2. \tag{A.113}$$

Dva linearno nezavisna rješenja homogene jednadžbe

$$y_1 = e^x \quad \text{i} \quad y_2 = e^{-2x}. \tag{A.114}$$

Opće rješenje homogene jednadžbe je njihova linearna kombinacija

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}. \tag{A.115}$$

Još trebamo naći partikularno rješenje nehomogene jednadžbe

$$y'' + y' - 2y = 8\sin 2x. \tag{A.116}$$

Pretpostavimo partikularno rješenje u obliku

$$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x. \tag{A.117}$$

Konstante A i B odredimo uvrštavanjem partikularnog rješenja u jednadžbu (A.116)

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 2A\cos 2x - 2B\sin 2x \tag{A.118}$$
$$-2A\sin 2x - 2B\cos 2x = 8\sin 2x. \tag{A.119}$$

Izjednačimo koeficijente uz $\sin 2x$ i $\cos 2x$

$$-4A - 2B - 2A = 8 \quad \text{i} \quad -4B + 2A - 2B = 0. \tag{A.120}$$

Desna jednakost daje $A = 3B$, dok lijeva jednakost daje $-18B - 2B = 8 \Longrightarrow B = -2/5$. Vratimo se desnoj jednakosti $\Longrightarrow A = -6/5$. Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe

$$y_p = -\frac{2}{5}\left(3\sin 2x + \cos 2x\right). \tag{A.121}$$

Opće rješenje ukupne diferencijalne jednadžbe je suma općeg rješenja homogene jednadžbe y_h i partikularnog rješenja y_p

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}\left(3\sin 2x + \cos 2x\right). \tag{A.122}$$

B Vektorski i afini prostori

B.1 Vektorski prostor

Neka je V vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$. U vektorskom prostoru V definirani su vektori $\vec{a}$ kao elementi prostora i sljedeće operacije

1. zbrajanje vektora $+ : V \otimes V \to V$,
2. množenje vektora skalarom $\cdot : \mathbb{R} \otimes V \to V$,

sa sljedećim svojstvima

1. asocijativnost: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}, \ \forall\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$
2. nulvektor: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}, \forall \vec{a} \in V$
3. suprotni vektor: $\forall \vec{a} \in V \ \exists \ -\vec{a} \in V \quad t.d. \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = 0$
4. komutativnost: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad \forall \quad \vec{a}, \vec{b} \in V$
5. asocijativnost: $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} \quad \forall \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{a} \in V$
6. distributivnost (I): $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \ \ \forall \ \ \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V$
7. distributivnost (II): $(\vec{a} + \vec{b})\alpha = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \ \ \forall \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \ \vec{a} \in V$
8. množenje jedinicom: $1\vec{a} = \vec{a} \ \ \forall \ \ \vec{a} \in V$

Preslikavanje $V \bigotimes V \to \mathbb{R}$ zovemo skalarnim produktom ako ispunjava sljedeće uvjete

1. Preslikavanje je linearno
$$\left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \alpha\vec{a} \cdot \vec{c} + \beta\vec{b} \cdot \vec{c}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V. \tag{B.1}$$
2. Preslikavanje je komutativno
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V. \tag{B.2}$$
3. Preslikavanje je pozitivno semi-definitno
$$\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \quad \forall \vec{a} \in V. \tag{B.3}$$
Pritom je $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ samo ako je $\vec{a}$ nul-vektor.

Vektorski prostor na kojem je definiran skalarni produkt zovemo Euklidov prostor. Koristeći skalarni produkt, definiramo duljinu vektora

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}. \tag{B.4}$$

B.2 Afin prostor

Za razliku od vektorskog prostora, u afinom prostoru A definirana je samo razlika elemenata kao preslikavanje $A \bigotimes A \to V$. Razlika elemenata nije element afinog, nego vektorskog prostora V *koji djeluje na A*.

B.3 Euklidov prostor

Da bismo odredili položaj tijela moramo odabrati referentnu točku, odnosno ishodište i utvrditi mjerni postupak. Izaberemo proizvoljnu referentnu točku i tri vektora s hvatištem u ishodištu i krajem u tri točke koje ne leže u istoj ravnini. Bilo kojoj točki u prostoru možemo pridružiti njihovu linearnu kombinaciju i na taj način uvesti koordinatizaciju prostora

$$\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3. \tag{B.5}$$

Vektor $\vec{x}$ zovemo položajem točke u odnosu na ishodište. Vektori $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ i $\vec{a}_3$ moraju biti linearno nezavisni, odnosno ne smiju postojati tri realna broja x_1, x_2 i x_3, od kojih je barem jedan različit od nule, a za koje bi vrijedilo

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = 0. \tag{B.6}$$

Jedn. (B.5) određuje položaje svih točaka u prostoru, pri čemu broj potrebnih podataka odgovara dimenziji prostora. U sljedećem koraku želimo utvrditi udaljenost neke točke od ishodišta. Neka su vektori $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ i $\vec{a}_3$ međusobno okomiti

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 = 0, \tag{B.7}$$

i neka im duljina iznosi jedan

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_3 = 1. \tag{B.8}$$

Norma vektora $\vec{a}_i$ odgovara mjernoj jedinici za duljinu. Udaljenost dviju točaka P i a

$$P : \vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3, \tag{B.9}$$

$$a : \vec{y} = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + y_3\vec{a}_3, \tag{B.10}$$

po definiciji glasi

$$d^2(P,a) \equiv (\vec{x} - \vec{y})\,(\vec{x} - \vec{y}) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^3. \tag{B.11}$$

Zahtjevom da prethodna definicija vrijedi za bilo koje dvije točke uveli smo metriku svojstvenu Euklidovom prostoru. Pojednostavljeno, Euklidov prostor je onaj prostor u kojem za pravokutni trokut vrijedi Pitagorin poučak. Nadalje, Euklidov prostor je homogen i izotropan, tj. udaljenost između dvije točke ne ovisi o koordinatama $\vec{x}$ i $\vec{y}$, već samo o njihovoj razlici $\vec{x} - \vec{y}$.

C Vektori

C.1 Algebra vektora

C.1.1 Osnovne operacije

Vektor $\vec{a}$ definiran je iznosom $|\vec{a}|$ i smjerom $\vec{a}_0$. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su jednaki ako vrijedi

- duljine vektora su jednake: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
- smjerovi vektora su jednaki : $\vec{a}_0 = \vec{b}_0$

Suprotni vektori imaju jednaku duljinu i suprotan smjer. Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ proizvoljni vektori, a p i q proizvoljni brojevi (skalari). Svojstva osnovnih operacija koje uključuju vektore i skalare:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{C.1}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \tag{C.2}$$

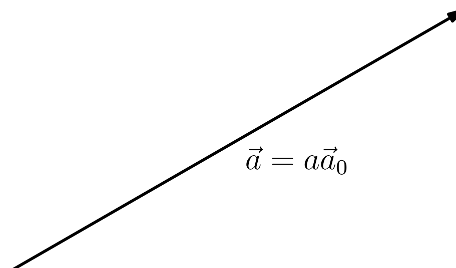
$$p(q\vec{a}) = (pq)\vec{a} = q(p\vec{a}) \tag{C.3}$$

$$(p+q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a} \quad \text{i} \quad p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b} \tag{C.4}$$

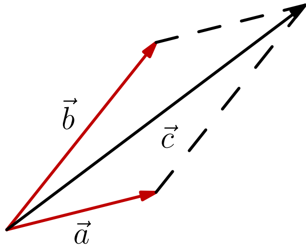
C.1.2 Skalarni produkt

Skalarni produkt dva vektora definiramo kao umnožak duljina vektora i kosinusa kuta između njih

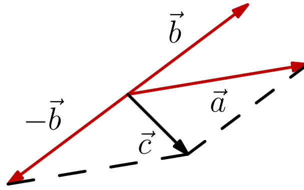
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha. \tag{C.5}$$



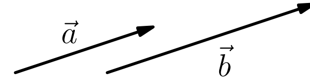
Slika C.1: Vektor $\vec{a}$ definiran je iznosom $|\vec{a}|$ i smjerom $\vec{a}_0$.



Slika C.2: Zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Slika C.3: Razlika vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Slika C.4: Produkt vektora $\vec{a}$ i skalara p, $\vec{b} = p\vec{a}$.

Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ proizvoljni vektori, dok je p skalar. Tada vrijede sljedeće relacije:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \tag{C.6}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \tag{C.7}$$

$$p(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (p\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (p\vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})p \tag{C.8}$$

Duljina vektora odgovara skalarnom umnošku vektora sa samim sobom

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2. \tag{C.9}$$

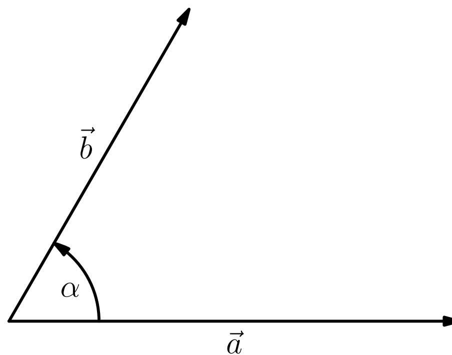
Ako su vektori ortogonalni ($\alpha = 90^0$), skalarni produkt jednak je nuli

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Longrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \text{ ako je } \vec{a},\ \vec{b} \neq 0. \tag{C.10}$$

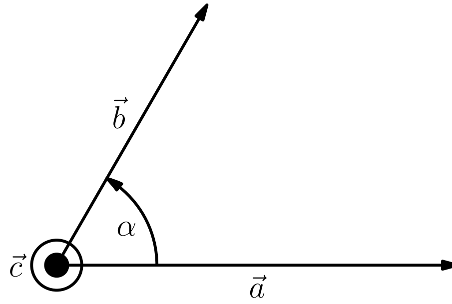
C.1.3 Vektorski produkt

Vektorski produkt dva vektora je vektor $\vec{c}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \Longrightarrow |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha. \tag{C.11}$$



Slika C.5: Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, kao i kut α među njima.



Slika C.6: Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, zajedno s vektorskim produktom $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Smjer vektora $\vec{c}$ određujemo pravilom desne ruke, dok je duljina vektora $\vec{c}$ jednaka produktu duljina vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i sinusa kuta između njih. Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ proizvoljni vektori, dok je p proizvoljni skalar. Tada vrijede sljedeće relacije:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \tag{C.12}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \tag{C.13}$$

$$p(\vec{a} \times \vec{b}) = (p\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (p\vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b})p \tag{C.14}$$

Vektori su paralelni ako je kut među njima nula. U tom slučaju je i vektorski produkt ta dva vektora nula

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Longrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ ako je } \vec{a},\ \vec{b} \neq 0. \tag{C.15}$$

C.2 Vektorske funkcije

C.2.1 Uvod

Ako svakoj vrijednosti skalarne varijable u odgovara vektor $\vec{A}$, tada je $\vec{A}(u)$ vektorska funkcija skalarne varijable u. Kao i skalarna funkcija, vektorska funkcija $\vec{A}$ može ovisiti o jednoj ili više varijabli.

- primjer 1: $\vec{A}$ ovisi o vremenu t; $\vec{A} = \vec{A}(t)$
- primjer 2: $\vec{A}$ ovisi o prostornim varijablama x, y, z; $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$
- primjer 3: $\vec{A}$ ovisi o prostornim varijablama x, y, z i vremenu t; $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$

C.2.2 Derivacija vektorske funkcije

Derivaciju vektorske funkcije definiramo analogno derivaciji skalarne funkcije

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{A}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)}{\Delta u}. \tag{C.16}$$

Jedinični vektori u Kartezijevom sustavu su konstatni pa njihove derivacije propadaju

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \frac{dA_1}{du}\vec{i} + \frac{dA_2}{du}\vec{j} + \frac{dA_3}{du}\vec{k}. \tag{C.17}$$

Neka su $\vec{A}(u)$ i $\vec{B}(u)$ vektorske, a $\phi(u)$ skalarna funkcija varijable u. Deriviramo produkt $\phi\vec{A}$

$$\frac{d}{du}(\phi\vec{A}) = \frac{d}{du}(\phi A_x\vec{i} + \phi A_y\vec{j} + \phi A_z\vec{k}) \tag{C.18}$$

$$\frac{d}{du}(\phi\vec{A}) = \frac{d\phi}{du}A_x\vec{i} + \phi\frac{dA_x}{du}\vec{i} + \frac{d\phi}{du}A_y\vec{j} + \phi\frac{dA_y}{du}\vec{j} + \frac{d\phi}{du}A_z\vec{k} + \phi\frac{dA_z}{du}\vec{k} \tag{C.19}$$

$$\frac{d}{du}(\phi\vec{A}) = \frac{d\phi}{du}\left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right) + \phi\left(\frac{dA_x}{du}\vec{i} + \frac{dA_y}{du}\vec{j} + \frac{dA_z}{du}\vec{k}\right) \tag{C.20}$$

$$\frac{d}{du}(\phi\vec{A}) = \frac{d\phi}{du}\vec{A} + \phi\frac{d\vec{A}}{du}. \tag{C.21}$$

Deriviramo skalarni produkt vektorskih funkcija $\vec{A}$ i $\vec{B}$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d}{du}(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \tag{C.22}$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{A_x}{du}B_x + A_x\frac{dB_x}{du} + \frac{A_y}{du}B_y + A_y\frac{dB_y}{du} + \frac{dA_z}{du}B_z + A_z\frac{dB_z}{du} \tag{C.23}$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du}. \tag{C.24}$$

Jednakim postupkom došli bi do formule za derivaciju vektorskog produkta

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B}. \tag{C.25}$$

C.2.3 Integral vektorske funkcije

Neka je $\vec{A}(u)$ vektorska funkcija varijable u

$$\vec{A}(u) = A_x(u)\vec{i} + A_y(u)\vec{j} + A_z(u)\vec{k}. \tag{C.26}$$

Neodređeni integral funkcije $\vec{A}$ definiramo na sljedeći način

$$\int \vec{A}(u)du = \vec{i} \int A_x(u)du + \vec{j} \int A_y(u)du + \vec{k} \int A_z(u)du. \qquad \text{(C.27)}$$

Ako postoji vektorska funkcija $\vec{B}(u)$ za koju vrijedi

$$\vec{A}(u) = \frac{d}{du}\vec{B}(u), \qquad \text{(C.28)}$$

tada integral (C.27) iznosi

$$\int \vec{A}(u)du = \int \frac{d}{du}\vec{B}(u)du = \vec{B}(u) + \vec{c}, \qquad \text{(C.29)}$$

gdje je $\vec{c}$ proizvoljan konstantni vektor. Određeni integral s granicama $u = \alpha$ i $u = \beta$ dan je izrazom

$$\int_\alpha^\beta \vec{A}(u)du = \int_\alpha^\beta \frac{d}{du}\vec{B}(u)du = \vec{B}(\beta) - \vec{B}(\alpha). \qquad \text{(C.30)}$$

C.3 Linijski integral

Pretpostavimo da je krivulja C u prostoru opisana vektorskom funkcijom $\vec{r}$ koja ovisi o parametru t

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \qquad \text{(C.31)}$$

Označimo s P_1 i P_2 krajnje točke krivulje C. Točka P_1 pritom odgovara vrijednosti parametra t_1, a točka P_2 vrijednosti t_2. Pretpostavimo da je zadana vektorska funkcija $\vec{A}$ koja ovisi o prostornim koordinatama

$$\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}. \qquad \text{(C.32)}$$

Integral tangencijalne komponente polja $\vec{A}$ po krivulji C je primjer linijskog integrala

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{r}. \qquad \text{(C.33)}$$

Ukratko je opisan općenit postupak računanja linijskih integrala

- krivulju po kojoj integriramo napišemo u parametarskom obliku $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$
- izračunamo diferencijal

$$d\vec{r} = dx(t)\vec{i} + dy(t)\vec{j} + dz(t)\vec{k} = \left[\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right] dt. \qquad \text{(C.34)}$$

- integriramo po parametru t od početne točke t_1 do konačne točke t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{dx}{dt} A_x(t) + \frac{dy}{dt} A_y(t) + \frac{dz}{dt} A_z(t) \right] dt. \qquad (C.35)$$

Ako je C zatvorena krivulja koja ne siječe samu sebe linijski integral označavamo s

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}. \qquad (C.36)$$

Općenito, vrijednost linijskog integrala ne ovisi samo o početnoj i krajnjoj točki, nego i o putanji po kojoj integriramo.

Parametarska jednadžba pravca

Često moramo izračunati linijski integral po pravcu koji spaja točke $A \equiv (x_A, y_A, z_A)$ i $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$. Parametarska jednadžba takvog pravca glasi

$$x(t) = x_A(1-t) + x_B t, \qquad (C.37)$$

$$y(t) = y_A(1-t) + y_B t, \qquad (C.38)$$

$$z(t) = z_A(1-t) + z_B t, \qquad (C.39)$$

pri čemu vrijednost parametra $t = 0$ odgovara točki A, a vrijednost $t = 1$ točki B. Lako se možemo uvjeriti da u dvodimenzionalnom slučaju eliminacijom parametra t dolazimo do standardnog oblika jednadžbe pravca koji prolazi kroz dvije točke

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A). \qquad (C.40)$$

Primjer C.1

Ako je zadano vektorsko polje

$$\vec{F} = (3x - 2y)\vec{i} + (y + 2z)\vec{j} - x^2\vec{k},$$

izračunajte linijski integral polja $\vec{F}$ po krivulji C definiranoj parametarskim jednadžbama

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3,$$

s početkom u točki $A = (0, 0, 0)$ i krajem u točki $B = (1, 1, 1)$.

Radijus-vektor točke na krivulji dan je parametarskom jednadžbom krivulje

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}. \tag{C.41}$$

Deriviramo radijus-vektor da bi dobili diferencijal $d\vec{r}$

$$d\vec{r} = dt\vec{i} + 2tdt\vec{j} + 3t^2dt\vec{k} = \left(\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}\right) dt. \tag{C.42}$$

Izračunamo skalarni produkt vektorskog polja $\vec{F}$ i diferencijala $d\vec{r}$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{[3x(t) - 2y(t)]\vec{i} + [y(t) + 2z(t)]\vec{j} - x^2(t)\vec{k}\right\} \cdot \left\{\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}\right\} dt \tag{C.43}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{3x(t) - 2y(t) + 2ty(t) + 4tz(t) - 3t^2x^2(t)\right\} dt. \tag{C.44}$$

Uvrstimo paramtarsku jednadžbu krivulje C umjesto $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{3t - 2t^2 + 2t^3 + 4t^4 - 3t^4\right\} dt = \left\{3t - 2t^2 + 2t^3 + t^4\right\} dt. \tag{C.45}$$

Početna točka krivulje C odgovara vrijednosti parametra $t = 0$, a konačna $t = 1$. Konačno, traženi linijski integral iznosi

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t=0}^{t=1} \left[3t - 2t^2 + 2t^3 + t^4\right] dt = \frac{23}{15}. \tag{C.46}$$

Primjer C.2

Ako je zadano vektorsko polje

$$\vec{F} = (3x - 2y)\vec{i} + (y + 2z)\vec{j} - x^2\vec{k}, \tag{C.47}$$

izračunajte linijski integral polja $\vec{F}$ po krivulji C s početkom u točki $A = (0,0,0)$ i krajem $B = (1,1,1)$ koja se sastoji od tri pravocrtna dijela: C_1 od $(0,0,0)$ do $(0,1,0)$, C_2 od $(0,1,0)$ do $(0,1,1)$ i C_3 od $(0,1,1)$ do $(1,1,1)$.

Traženi integral možemo rastaviti na tri dijela

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}. \tag{C.48}$$

Prvo integriramo po krivulji C_1 definiranoj radijus-vektorom

$$\vec{r} = y\vec{j} \Longrightarrow d\vec{r} = dy\vec{j}. \tag{C.49}$$

Polje na putanji C_1 dobijemo uvrštavanjem $x = 0$ i $z = 0$ u jedn. (C.47)

$$\vec{F} = -2y\vec{i} + y\vec{j}. \tag{C.50}$$

Skalarni produkt sile i diferencijala

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \left[-2y\vec{i} + y\vec{j}\right]\cdot dy\vec{j} = ydy. \tag{C.51}$$

Integriramo od točke $y = 0$ do točke $y = 1$

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{y=0}^{y=1} ydy = \frac{1}{2}. \tag{C.52}$$

Sada integriramo po krivulji C_2 definiranoj radijus-vektorom

$$\vec{r} = \vec{j} + z\vec{k} \Longrightarrow d\vec{r} = dz\vec{k}. \tag{C.53}$$

Polje na putanji C_2 dobijemo uvrštavanjem $x = 0$ i $y = 1$ u jedn. (C.47)

$$\vec{F} = -2\vec{i} + (1 + 2z)\vec{j}. \tag{C.54}$$

Skalarni produkt sile i diferencijala

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \left[-2\vec{i} + (1 + 2z)\vec{j}\right]\cdot dz\vec{k} = 0, \tag{C.55}$$

iznosi nula pa doprinos po krivulji C_2 očito propada. Preostaje nam integral po krivulji C_3 definiranoj radijus-vektorom

$$\vec{r} = x\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \Longrightarrow d\vec{r} = dx\vec{i}. \tag{C.56}$$

Polje na putanji C_3 dobijemo uvrštavanjem $y = 1$ i $z = 1$

$$\vec{F} = (3x - 2)\vec{i} + 3\vec{j} - x^2\vec{k}. \tag{C.57}$$

Skalarni produkt sile i diferencijala

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \left[(3x - 2)\vec{i} + 3\vec{j} - x^2\vec{k}\right] \cdot dx\vec{i} = (3x - 2)dx. \tag{C.58}$$

Integriramo od točke $x = 0$ do točke $x = 1$

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x=0}^{x=1} (3x - 2)dx = -\frac{1}{2}. \tag{C.59}$$

Zbroj sva tri doprinosa daje nulu

$$I = I(C_1) + I(C_2) + I(C_3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \tag{C.60}$$

Primjer C.3

Ako je zadano vektorsko polje

$$\vec{F} = 3x^2\vec{i} + (2xz - y)\vec{j} + z\vec{k},$$

izračunajte linijski integral polja $\vec{F}$ po krivulji C opisanoj parametarskim jednadžbama

$$x(t) = t, \quad y(t) = \frac{1}{4}t^2 \quad \text{i} \quad z(t) = \frac{3}{8}t^3,$$

s početkom u točki $P_1 = (0,0,0)$ i krajem u točki $P_2 = (2,1,3)$.

Radijus-vektor točke na krivulji C glasi

$$\vec{r} = t\vec{i} + \frac{1}{4}t^2\vec{j} + \frac{3}{8}t^3\vec{k}, \tag{C.61}$$

dok je odgovarajući diferencijal radijus-vektora dan s

$$d\vec{r} = dt\vec{i} + \frac{1}{2}tdt\vec{j} + \frac{9}{8}t^2dt\vec{k}. \tag{C.62}$$

Izračunamo skalarni produkt polja $\vec{F}$ i diferencijala $d\vec{r}$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{3x^2(t)\vec{i} + [2x(t)z(t) - y(t)]\,\vec{j} + z(t)\vec{k}\right\} \cdot \left\{\vec{i} + \frac{1}{2}t\vec{j} + \frac{9}{8}t^2\vec{k}\right\} dt \tag{C.63}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{3x^2(t) + \left[x(t)z(t) - \frac{1}{2}y(t)\right] t + \frac{9}{8}z(t)t^2\right\} dt \tag{C.64}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{3t^2 + \left[\frac{3}{8}t^4 - \frac{1}{8}t^2\right] t + \frac{27}{64}t^5\right\} dt \tag{C.65}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{3t^2 + \frac{3}{8}t^5 - \frac{1}{8}t^3 + \frac{27}{64}t^5\right\} dt. \tag{C.66}$$

Početak krivulje odgovara vrijednosti parametra $t = 0$, a kraj vrijednosti parametra $t = 2$. Integriramo

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t=0}^{t=2} \left\{3t^2 + \frac{3}{8}t^5 - \frac{1}{8}t^3 + \frac{27}{64}t^5\right\} dt \tag{C.67}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{t^3 + \frac{1}{16}t^6 - \frac{1}{32}t^4 + \frac{9}{128}t^6\right\}\Bigg|_{t=0}^{t=2} \tag{C.68}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 8 + 4 - \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 16. \tag{C.69}$$

C.4 Konzervativno polje

Za vektorsko polje kažemo da je konzervativno ako linijski integral

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_C [A_x dx + A_y dy + A_z dz], \tag{C.70}$$

ne ovisi o putanji C koja spaja točke P_1 i P_2. Takav uvjet će biti ispunjen ako i samo ako postoji skalarno polje ϕ t.d. vrijedi

$$\vec{A} = \nabla \phi. \tag{C.71}$$

Linijski integral u tom slučaju ovisi samo o točkama P_1 i P_2

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \nabla \phi \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \phi(2) - \phi(1). \tag{C.72}$$

Direktnim računom možemo pokazati da je rotacija gradijenta skalarnog polja jednaka nuli

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \phi) = \vec{i}\,[\partial_y(\partial_z \phi) - \partial_z(\partial_y \phi)] + \vec{j}\,[\partial_z(\partial_x \phi) - \partial_x(\partial_z \phi)] \\ + \vec{k}\,[\partial_x(\partial_y \phi) - \partial_y(\partial_x \phi)] = 0, \end{aligned} \tag{C.73}$$

odnosno rotacija konzervativnog polja mora iščezavati

$$\nabla \times \vec{A} = 0. \tag{C.74}$$

Ukratko, tri ekvivalentna kriterija određivanja da li je vektorsko polje $\vec{A}$ konzervativno glase

1. Linijski integral po bilo kojoj zatvorenoj putanji jednak je nuli

$$\oint \vec{A} d\vec{r} = 0. \tag{C.75}$$

2. Postoji skalarno polje ϕ sa svojstvom

$$\vec{A} = \nabla \phi. \tag{C.76}$$

3. Rotacija polja $\vec{A}$ jednaka je nuli

$$\nabla \times \vec{A} = 0. \tag{C.77}$$

Primjer C.4

Pokažite da je polje

$$\vec{A} = 2xyz\vec{i} + x^2z\vec{j} + x^2y\vec{k},$$

konzervativno i nađite skalarnu funkciju $\phi(x, y, z)$ za koju vrijedi $\vec{A} = \nabla\phi$.

Dovoljno je pokazati da rotacija polja $\vec{A}$ iščezava

$$\nabla \times \vec{A} = 0. \tag{C.78}$$

Izračunamo rotaciju

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \tag{C.79}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{i}\,[\partial_y A_z - \partial_z A_y] - \vec{j}\,[\partial_x A_z - \partial_z A_x] + \vec{k}\,[\partial_x A_y - \partial_y A_x]\,. \tag{C.80}$$

Potebne su nam sljedeće parcijalne derivacije

$$\partial_y A_z = x^2,\ \partial_z A_y = x^2,\ \partial_x A_z = 2xy,\ \partial_z A_x = 2xy,\ \partial_x A_y = 2xz,\ \partial_y A_x = 2xz.$$

Uvrstimo derivacije u formulu (C.80)

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{i}\left[x^2 - x^2\right] - \vec{j}\,[2xy - 2xy] + \vec{k}\,[2xz - 2xz] = 0. \tag{C.81}$$

Polje $\vec{A}$ je očito konzervativno. Sada tražimo skalarno polje $\phi(x, y, z)$ za koje vrijedi

$$\nabla\phi = \left[\vec{i}\frac{\partial}{\partial_x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial_y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial_z}\right]\phi(x, y, z) = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}. \tag{C.82}$$

Funkcija $\phi(x, y, z)$ mora zadovoljavati tri jednadžbe

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = A_x = 2xyz, \tag{C.83}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = A_y = x^2z, \tag{C.84}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = A_z = x^2y. \tag{C.85}$$

Integriramo jedn. (C.83)

$$\phi(x, y, z) = x^2yz + F(y, z), \tag{C.86}$$

pri čemu je $F(y, z)$ proizvoljna funkcija koja ovisi o varijablama y i z. Uvrstimo rješenje (C.86) u jedn. (C.84)

$$x^2 z + \frac{\partial F(y,z)}{\partial y} = x^2 z \Longrightarrow F(y,z) = G(z) + c, \tag{C.87}$$

odnosno

$$\phi(x,y,z) = x^2 yz + G(z) + c. \tag{C.88}$$

Sada uvrstimo rješenje (C.88) u jedn. (C.85)

$$x^2 y + G'(z) = x^2 y \Longrightarrow G(z) = c. \tag{C.89}$$

Konačno, funkcija $\phi(x, y, z)$ glasi

$$\phi(x,y,z) = x^2 yz + c. \tag{C.90}$$

D Plošni integrali

D.1 Plošni integrali u Kartezijevim koordinatama

Dvostruki integral neprekidne funkcije $f(x, y)$ po omeđenom zatvorenom području D ravnine xy definiramo kao dvostruku sumu

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\Delta x_i, \Delta y_i \to 0} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\Delta x_i \Delta y_k. \tag{D.1}$$

Suma se proteže po onim vrijednostima i i k za koje točke (x_i, y_k) pripadaju području S.

D.1.1 Pravokutno područje integracije

Promatramo jednostavno pravokutno područje integracije

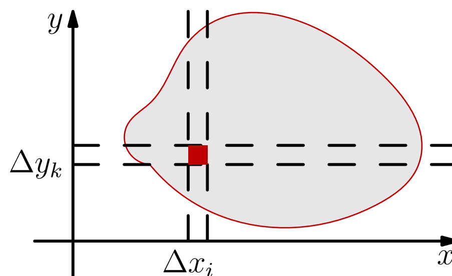
$$a \leq x \leq b \quad \text{i} \quad c \leq y \leq d. \tag{D.2}$$

Takvo područje označavamo s

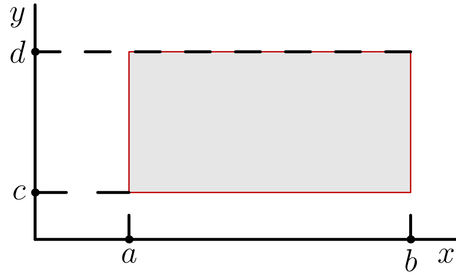
$$R = [a, b] \times [c, d]\,. \tag{D.3}$$

Prvi način integracije:
Os x podijelimo na segmente Δx, a zatim svaki pravokutnik dimenzija $\Delta x \times (d - c)$ dijelimo na manje pravokutnike dimenzije $\Delta x \times \Delta y$. Ukupni integral dobijemo tako da prvo zbrojimo doprinose pravokutnika $\Delta x \times \Delta y$ u svakom pojedinom stupcu, a zatim zbrojimo doprinose svih stupaca

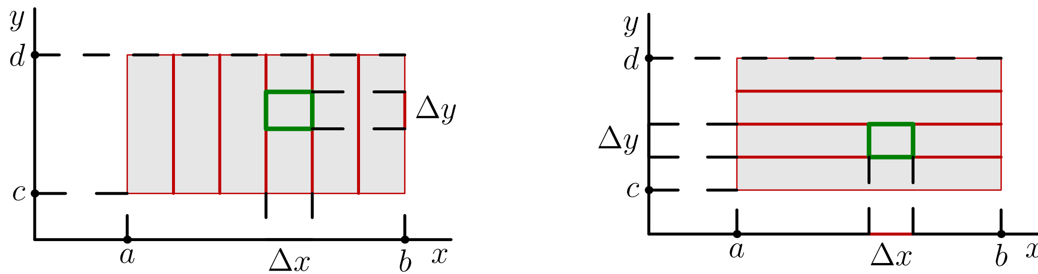
$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx. \tag{D.4}$$



Slika D.1: Podjela područja integracije na infinitezimalne dijelove.



Slika D.2: Pravokutno područje integracije.



Slika D.3: Dva moguća redosljeda integracije.

Drugi način integracije:
Os y podijelimo na segmente Δy, a zatim svaki pravokutnik dimenzija $\Delta y \times (b-a)$ dijelimo na manje pravokutnike dimenzije $\Delta x \times \Delta y$. Ukupni integral dobijemo tako da zbrojimo doprinose pravokutnika $\Delta x \times \Delta y$ u svakom pojedinom retku, a zatim zbrojimo doprinose svih redaka

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy. \tag{D.5}$$

U prvom slučaju najprije integriramo funkciju $f(x,y)$ po y u granicama od c do d, dok varijablu x držimo konstantnom. Dobiveni rezultat (koji ovisi o x) integriramo po x u granicama od a do b. U drugom slučaju najprije integriramo funkciju $f(x,y)$ po x u granicama od c do d, dok varijablu y držimo konstantnom. Dobiveni rezultat (koji ovisi o y) integriramo po y u granicama od c do d. Ako je funkcija neprekidna na području R, oba načina integriranja moraju dati isti rezultat.

Primjer D.1

Izračunajte dvostruki integral

$$\iint_R 6xy^2 dA, \tag{D.6}$$

ako je područje integracije pravokutnik $R = [2,4] \times [1,2]$.

Zadatak ćemo riješiti na dva načina kako bi ilustrirali da krajnji rezultat ne ovisi o poretku integracije.

Rješenje 1:

Prvo integriramo po y od $y = 1$ do $y = 2$, a zatim po x od $x = 2$ do $x = 4$

$$\iint_R 6xy^2 dA = \int_{x=2}^{x=4} \left[\int_{y=1}^{y=2} 6xy^2 dy \right] dx. \tag{D.7}$$

Kada integriramo po y varijablu x smatramo konstantom pa je možemo izvaditi iz integrala po y

$$\iint_R 6xy^2 dA = 6 \int_{x=2}^{x=4} x \left[\int_{y=1}^{y=2} y^2 dy \right] dx = 6 \int_2^4 x \left[\frac{y^3}{3} \right] \Big|_1^2 \tag{D.8}$$

$$= 2 \int_2^4 [7x]\, dx = 14 \, \frac{x^2}{2} \Big|_2^4 \tag{D.9}$$

$$= 7\,(16 - 4) = 84. \tag{D.10}$$

Rješenje 2: Prvo integriramo po x od $x = 2$ do $x = 4$, a zatim po y od $y = 1$ do $y = 2$

$$\iint_R 6xy^2 dA = \int_{y=1}^{y=2} \left[\int_{x=2}^{x=4} 6xy^2 dy \right] dx. \tag{D.11}$$

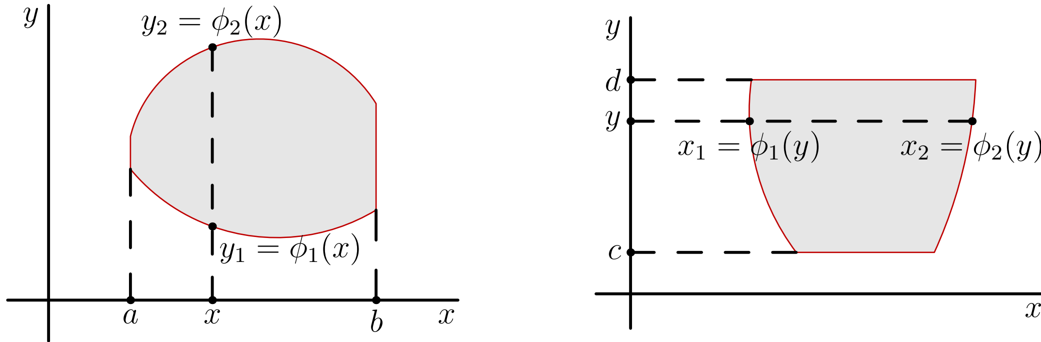
Kada integriramo po x varijablu y smatramo konstantom pa je možemo izvaditi iz integrala po x

$$\iint_R 6xy^2 dA = 6 \int_{y=1}^{y=2} y^2 \left[\int_{x=2}^{x=4} x dx \right] dy = 6 \int_1^2 y^2 \left[\frac{x^2}{2} \right] \Big|_2^4 \tag{D.12}$$

$$= 3 \int_1^2 y^2 \,[16 - 4]\, dx = 36 \, \frac{y^3}{3} \Big|_1^2 \tag{D.13}$$

$$= 12\,(8 - 1) = 84. \tag{D.14}$$

U oba slučaja smo došli do istog rezultata jer on ne ovisi o redosljedu integracije.



Slika D.4: Dva osnovna tipa područja integracije.

D.1.2 Općenito područje integracije

Dosada smo razmatrali samo pravokutna područja integracije, dok je u praksi područje integracije često neka općenita površina D

$$\iint_D f(x,y)dA. \tag{D.15}$$

Pritom razlikujemo dva osnovna područja integracije. U prvom slučaju područje integracije je s lijeve i desne strane omeđeno pravcima $x = a$ i $x = b$ ($b > a$), a s gornje i donje strane neprekidnim krivuljama $y = \phi_1(x)$ i $y = \phi_2(x)$. Koristimo sve točke (x, y) za koje obje koordinate zadovoljavaju nejednakosti

$$a \leq x \leq b \quad \text{i} \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x). \tag{D.16}$$

Područje integracije napišemo kao

$$D = \{(x,y) \,|a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}. \tag{D.17}$$

Prvo integriramo po varijabli y, a zatim po varijabli x

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy\right] dx. \tag{D.18}$$

Pri računanju integrala po varijabli y, varijablu x smatramo konstantom. Uočimo da granice integracije u integralu po y ovise o varijabli x. U drugom slučaju područje integracije je s donje i gornje strane omeđeno pravcima $y = c$ i $y = d$ ($d > c$), a s lijeve i desne strane neprekidnim krivuljama $x = \phi_1(y)$ i $x = \phi_2(y)$. Koristimo sve točke (x, y) za koje obje koordinate zadovoljavaju nejednakosti

$$c \leq y \leq d \quad \text{i} \quad \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y). \tag{D.19}$$

Područje integracije napišemo u obliku

$$D = \{(x, y) \,|c \leq y \leq d, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\}. \qquad \text{(D.20)}$$

U ovom slučaju prvo integriramo po varijabli x, a zatim po varijabli y

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_c^d \left[\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y)dx\right] dy. \qquad \text{(D.21)}$$

Kada integriramo po x, varijablu y smatramo konstantom, a granice integracije u integralu po varijabli x ovise o varijabli y.

Primjer D.2

Izračunajte plošni integral po naznačenom području integracije

$$\iint_D e^{x/y} dA,\ D = \{(x,y)\,|1 \leq y \leq 2,\ y \leq x \leq y^3\}. \tag{D.22}$$

Područje integracije je omeđeno pravcima $y = 1$ i $y = 2$ (slučaj 2) pa možemo primjenimo jedn. (D.21)

$$\iint_D e^{x/y} dA = \int_1^2 \left[\int_y^{y^3} e^{x/y} dx \right] dy. \tag{D.23}$$

Prvo riješimo integral po varijabli x, pri čemu varijablu y tretiramo kao konstantu

$$\int_y^{y^3} e^{x/y} dx = \left. ye^{x/y} \right|_y^{y^3} = ye^{y^2} - ye^1. \tag{D.24}$$

Vratimo se početnom integralu

$$\iint_D e^{x/y} dA = \int_1^2 \left[ye^{y^2} - y \right] dy = \int_1^2 ye^{y^2} dy - e \int_1^2 ydy. \tag{D.25}$$

Lijevi integral izračunamo pomoću supstitucije $u = y^2$

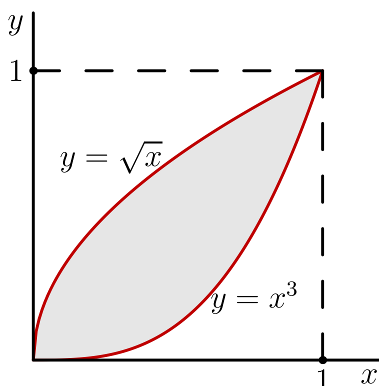
$$\int_1^2 ye^{y^2} dy = \frac{1}{2} \int_1^2 e^{y^2} dy^2 = \frac{1}{2} \int_1^4 e^u du = \frac{1}{2} \left[e^4 - e^1 \right], \tag{D.26}$$

dok je desni integral tablični

$$\int_1^2 ydy = \frac{1}{2} \left. y^2 \right|_1^2 = \frac{3}{2}. \tag{D.27}$$

Ukupni integral iznosi

$$\iint_D e^{x/y} dA = \frac{1}{2} e^4 - 2e. \tag{D.28}$$



Slika D.5: Područje integracije omeđeno krivuljama $y = \sqrt{x}$ i $y = x^3$.

Primjer D.3

Izračunajte plošni integral

$$\iint_D \left[4xy - y^3\right] dA, \tag{D.29}$$

po području omeđenom funkcijama $y = \sqrt{x}$ i $y = x^3$.

Da bi skicirali područje integracije, prvo mu odredimo granice

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{i} \quad x^3 \leq y \leq \sqrt{x}. \tag{D.30}$$

Radi se o području integracije tipa jedan pa možemo primijeniti jedn. (D.18)

$$\iint_D \left[4xy - y^3\right] dA = \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{\sqrt{x}} \left(4xy - y^3\right) dy\right] dx. \tag{D.31}$$

Prvo integriramo po varijabli y, pritom držeći varijablu x konstatnom

$$\int_{x^3}^{\sqrt{x}} \left(4xy - y^3\right) dy = \int_{x^3}^{\sqrt{x}} 4xydy - \int_{x^3}^{\sqrt{x}} y^3dy \tag{D.32}$$

$$= 4x \int_{x^3}^{\sqrt{x}} ydy - \int_{x^3}^{\sqrt{x}} y^3dy \tag{D.33}$$

$$= 4x \left. \frac{y^2}{2} \right|_{x^3}^{\sqrt{x}} - \left. \frac{y^4}{4} \right|_{x^3}^{\sqrt{x}} \tag{D.34}$$

$$= 2x\left(-x^6 + x\right) - \frac{1}{4}\left(-x^{12} + x^2\right) \tag{D.35}$$

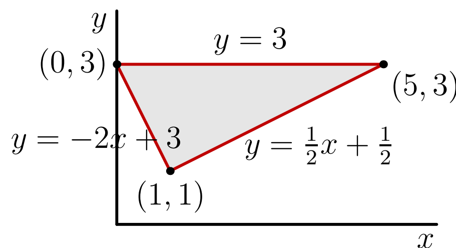
$$= -2x^7 + 2x^2 + \frac{1}{4}x^{12} - \frac{1}{4}x^2. \tag{D.36}$$

Vratimo se dvostrukom integralu

$$\iint_D \left[4xy - y^3\right] dA = \int_0^1 \left[-2x^7 + \frac{7}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^{12}\right] dx \tag{D.37}$$

$$= \left(-\frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{52}x^{13} + \frac{7}{12}x^3\right)\Bigg|_0^1 \tag{D.38}$$

$$= \frac{55}{156}. \tag{D.39}$$



Slika D.6: Područje integracije je trokut s vrhovima u točkama $(0,3)$, $(1,1)$ i $(5,3)$.

Primjer D.4

Izračunajte integral

$$\iint_D (6x^2 - 40y)dA,$$

ako je područje integracije trokut s vrhovima u točkama $(0,3)$, $(1,1)$ i $(5,3)$.

Da bi mogli primjeniti jedn. (D.18), područje integracije dijelimo na dva dijela

$$D = D_1 \cup D_2, \tag{D.40}$$

gdje D_1 označava područje lijevo od pravca $x = 1$

$$D_1 = \{(x,y)\ |0 \leq x \leq 1, -2x + 3 \leq y \leq 3\}, \tag{D.41}$$

a D_2 označava područje desno od pravca $x = 1$

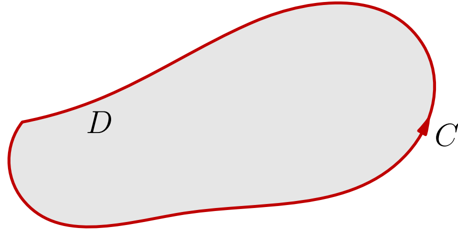
$$D_2 = \{(x,y)\ |1 \leq x \leq 5, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leq y \leq 3\}. \tag{D.42}$$

Traženi integral možemo razbiti na dva dijela

$$\iint_D (6x^2 - 40y)dA = \iint_{D_1} (6x^2 - 40y)dA + \iint_{D_2} (6x^2 - 40y)dA. \tag{D.43}$$

Oba integrala rješavamo istim postupkom kao u nekoliko prethodnih primjera

$$\iint_D (6x^2 - 40y)dA = -\frac{935}{3}. \tag{D.44}$$



Slika D.7: Površina D obuhvaćena petljom C.

D.2 Greenov teorem

Greenov teorem povezuje linijski integral vektorskog polja po zatvorenoj putanji i plošni integral po površini D omeđenoj putanjom C Orijentacija krivulje je po konvenciji pozitivna ako je obilazimo u smjeru kazaljke na satu, dok je u suprotnom negativna. Pretpostavimo da je zadano dvodimenzionalno vektorsko polje

$$\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}. \tag{D.45}$$

Greenov teorem u tom slučaju glasi

$$\int_C (P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA. \tag{D.46}$$

Izraz u zagradi na desnoj strani je rotacija dvodimenzionalnog polja $\vec{F}$.

D.2.1 Ilustracija Greenovog teorema

Greenov teorem možemo ilustrirati na primjeru vektorskog polja

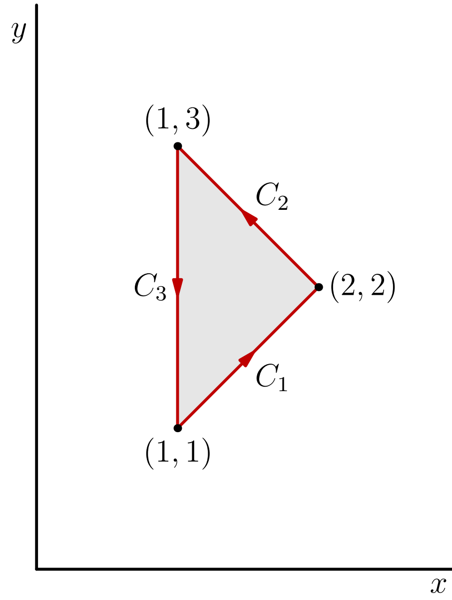
$$\vec{F} = 2(x^2 + y^2)\vec{i} + (x+y)^2\vec{j} \tag{D.47}$$

i petlje u obliku trokuta s vrhovima u točkama $A(1,1)$, $B(2,2)$ i $C(1,3)$. Želimo pokazati da vrijedi Greenov teorem

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \int_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{s}. \tag{D.48}$$

Linijski integral polja $\vec{F}$ po trokutu mora biti jednak plošnom integralu rotacije polja $\vec{F}$ po trokutu na sl. (D.8).
Linijski integral
Linijski integral po trokutu razbijemo na tri integrala

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F}d\vec{r}. \tag{D.49}$$



Slika D.8: Petlja je trokut s vrhovima u točkama $A(1,1)$, $B(2,2)$ i $C(1,3)$.

Linija C_1 leži na pravcu $y = x$ pa je radijus vektor točke na putanji C_1 dan s

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + x\vec{j}, \tag{D.50}$$

dok njegov diferencijal glasi

$$d\vec{r} = dx\left(\vec{i} + \vec{j}\right). \tag{D.51}$$

Polje na istoj putanji dobijemo uvrštavanjem $y = x$ u izraz (D.47)

$$\vec{F} = 4x^2\vec{i} + 4x^2\vec{j} = 4x^2\left(\vec{i} + \vec{j}\right). \tag{D.52}$$

Integriramo skalarni produkt diferencijala $d\vec{r}$ i polja $\vec{F}$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x=1}^{x=2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x=1}^{x=2} 8x^2 dx = \frac{56}{3}. \tag{D.53}$$

Linija C_2 leži na pravcu $y = -x + 4$ pa je radijus-vektor točke na putanji C_2 dan s

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + (-x + 4)\vec{j}, \tag{D.54}$$

a njegov diferencijal glasi

$$d\vec{r} = dx\left(\vec{i} - \vec{j}\right). \tag{D.55}$$

Polje na putanji C_2 dobijemo uvrštavanjem $y = -x + 4$ u izraz (D.47)

$$\vec{F} = 2\left[x^2 + (-x + 4)^2\right]\vec{i} + 16\vec{j} = 4\left[x^2 - 4x + 8\right]\vec{i} + 16\vec{j}. \tag{D.56}$$

Skalarni produkt polja $\vec{F}$ i diferencijala $d\vec{r}$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = 4\left(x^2-4x+8\right)dx - 16dx = 4x^2dx - 16xdx + 16dx. \tag{D.57}$$

Integriramo skalarni produkt diferencijala $d\vec{r}$ i polja $\vec{F}$

$$\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x=2}^{x=1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = 4\int_{x=2}^{x=1}\left(x^2-4x+4\right)dx = -\frac{4}{3}. \tag{D.58}$$

Linija C_3 leži na pravcu $x=1$ pa je radijus vektor točke na putanji C_3 dan s

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{i} + y\vec{j}, \tag{D.59}$$

dok njegov diferencijal glasi

$$d\vec{r} = dy\vec{j}. \tag{D.60}$$

Polje na putanji C_3 dobijemo uvrštavanjem $x=1$ u izraz (D.47)

$$\vec{F} = 2(1+y^2)\vec{i} + (1+y)^2\vec{j}. \tag{D.61}$$

Izračunamo skalarni produkt polja $\vec{F}$ i diferencijala $d\vec{r}$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = (1+y)^2dy. \tag{D.62}$$

Integriramo skalarni produkt diferencijala $d\vec{r}$ i polja $\vec{F}$

$$\int_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{y=3}^{y=1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{y=3}^{y=1}\left(1+2y+y^2\right)dx = -\frac{56}{3}. \tag{D.63}$$

Sva tri doprinosa zajedno daju

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{56}{3} - \frac{4}{3} - \frac{56}{3} = -\frac{4}{3}. \tag{D.64}$$

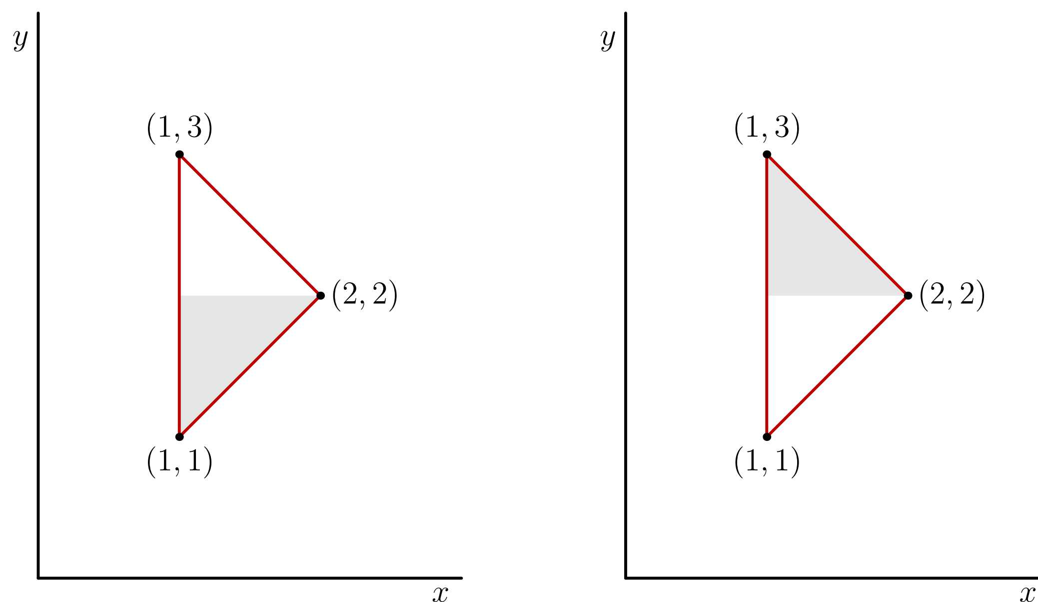
Plošni integral

Da bi izračunali plošni integral u formuli (D.48) trebamo rotaciju polja $\vec{F}$

$$\nabla\times\vec{F} = \vec{k}\left(\partial_x F_y - \partial_y F_x\right) = 2\left(x-y\right)\vec{k}. \tag{D.65}$$

Trokut po kojem integriramo se nalazi u ravnini xy, a element površine $d\vec{s}$ ima smjer $\vec{k}$. Integral po površini trokuta možemo podijeliti na dva dijela U integralu na lijevoj slici D.9 po x integriramo od $x=1$ do $x=2$, a po y od $y=x$ (linija C_1) do $y=2$

$$I_1 = \int_1^2\int_x^2 2(x-y)dxdy = 2\int_1^2\int_x^2 xdxdy - 2\int_1^2\int_x^2 ydxdy. \tag{D.66}$$



Slika D.9: Podjela područja integracije pri računanju plošnog integrala.

Prvi doprinos integralu I_1

$$I_{1a} = 2\int_1^2 \int_x^2 x dx dy = 2\int_1^2 x \int_x^2 dy dx \tag{D.67}$$

$$= 2\int_1^2 x \left(y|_x^2\right) dx = 2\int_1^2 x\,(2-x)\,dx \tag{D.68}$$

$$= 4\int_1^2 x dx - 2\int_1^2 x^2 dx \tag{D.69}$$

$$= 4\,\frac{x^2}{2}\bigg|_{x=1}^{x=2} - 2\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{x=1}^{x=2} = 2(4-1) - 2\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) \tag{D.70}$$

$$= 6 - \frac{14}{3} = \frac{4}{3}. \tag{D.71}$$

Drugi doprinos integralu I_1

$$
\begin{aligned}
I_{1b} &= -2\int_1^2\int_x^2 y dx dy = -2\int_1^2\int_x^2 y dy dx \\
&= -2\int_1^2 \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_x^2\right) dx = -2\int_1^2 \left(2-\frac{x^2}{2}\right) dx && \text{(D.72)}\\
&= -4\int_1^2 dx + \int_1^2 x^2 dx && \text{(D.73)}\\
&= -4\, x|_{x=1}^{x=2} + \frac{x^3}{3}\bigg|_{x=1}^{x=2} = -4(2-1) + \left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) && \text{(D.74)}\\
&= -4 + \frac{7}{3} = -\frac{5}{3}. && \text{(D.75)}
\end{aligned}
$$

Ukupno, integral na lijevoj slici daje

$$
I_1 = I_{1a} + I_{1b} = \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}. \qquad \text{(D.76)}
$$

U integralu na desnoj slici D.9 po x integriramo od $x = 1$ do $x = 2$, a po y od $y = 2$ do $y = -x + 4$ (linija C_2)

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_1^2\int_2^{4-x} 2(x-y) dx dy \\
&= 2\int_1^2\int_2^{4-x} x dx dy - 2\int_1^2\int_2^{4-x} y dx dy. && \text{(D.77)}
\end{aligned}
$$

Prvi doprinos integralu I_2

$$
\begin{aligned}
I_{2a} &= 2\int_1^2\int_2^{4-x} x dx dy = 2\int_1^2 x \int_2^{4-x} dy dx && \text{(D.78)}\\
&= 2\int_1^2 x \left(y|_2^{4-x}\right) dx = 2\int_1^2 x\,(4-x-2)\, dx && \text{(D.79)}\\
&= 4\int_1^2 x dx - 2\int_1^2 x^2 dx = 2\, x^2|_{x=1}^{x=2} - \frac{2}{3}\, x^3|_{x=1}^{x=2} && \text{(D.80)}\\
&= 2(4-1) - \frac{2}{3}(8-1) = 6 - \frac{14}{3} = \frac{4}{3}. && \text{(D.81)}
\end{aligned}
$$

Drugi doprinos integralu I_2

$$I_{2b} = -2\int_1^2\int_2^{4-x} ydxdy = -2\int_1^2\int_2^{4-x} ydydx \tag{D.82}$$

$$= -\int_1^2 \left(y^2\Big|_2^{4-x}\right) dx = -\int_1^2 \left[(4-x)^2 - 4\right] dx \tag{D.83}$$

$$= -\int_1^2 \left[12 - 8x + x^2\right] dx \tag{D.84}$$

$$= -12\int_1^2 dx + 8\int_1^2 xdx - \int_1^2 x^2 dx \tag{D.85}$$

$$= -12 + 4(4-1) - \frac{1}{3}(8-1) = -\frac{7}{3}. \tag{D.86}$$

Ukupni doprinos integrala na desnoj slici

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b} = \frac{4}{3} - \frac{7}{3} = -1. \tag{D.87}$$

Zbrojimo integrale I_1 i I_2

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) d\vec{s} = I_1 + I_2 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}. \tag{D.88}$$

Linijski i plošni integral se zaista poklapaju, u skladu s Greenovim teoremom.

D.3 Plošni integrali u polarnim koordinatama

Područje integracije je ponekad jednostavnije izraziti u polarnim koordinatama. Npr., integriramo funkciju $f(x,y)$ po disku D radijusa R s centrom u ishodištu. Granice integracije u kartezijevim koordinatama glase

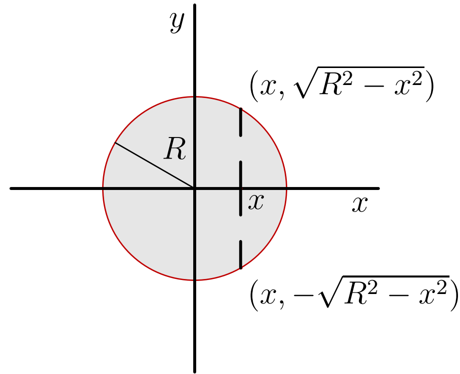
$$-2 \leq x \leq 2 \quad \text{i} \quad -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}. \tag{D.89}$$

Integral u kartezijevim koordinatama je nespretan za rješavanje zbog složenih granica integracije

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dydx. \tag{D.90}$$

Prijelazom na polarne koordinate r i θ granice integracije postaju znatno jednostavnije

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{i} \quad 0 \leq r \leq R. \tag{D.91}$$



Slika D.10: Područje integracije je disk radijusa R s centrom u ishodištu.

Infinitezimalni element površine dA transformiramo pomoću Jacobijana

$$dA = dxdy = |\mathcal{J}|drd\theta, \tag{D.92}$$

prijelaza iz kartezijevih u polarne koordinate

$$x = r\cos\theta \quad \text{i} \quad y = r\sin\theta, \tag{D.93}$$

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}. \tag{D.94}$$

Izračunamo potrebnaderivacije

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta. \tag{D.95}$$

Primjenimo formulu za 2×2 determinantu

$$\mathcal{J} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r. \tag{D.96}$$

Vratimo se formuli za infinitezimalni element površine

$$dA = dxdy = |\mathcal{J}|drd\theta = rdrd\theta. \tag{D.97}$$

Konačno, plošni integral u polarnim koordinatama

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta. \tag{D.98}$$

Primjer D.5

Koristeći polarne koordinate izračunajte integral

$$\iint_D 2xydA, \tag{D.99}$$

gdje je D površina omeđena kružnicama radijusa $r_1 = 2$ i $r_2 = 5$ u prvom kvadrantu.

Granice integracije zadanog područja glase

$$2 \le r \le 5 \quad \text{i} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}. \tag{D.100}$$

Podintegralnu funkciju prebacimo u polarne koordinate

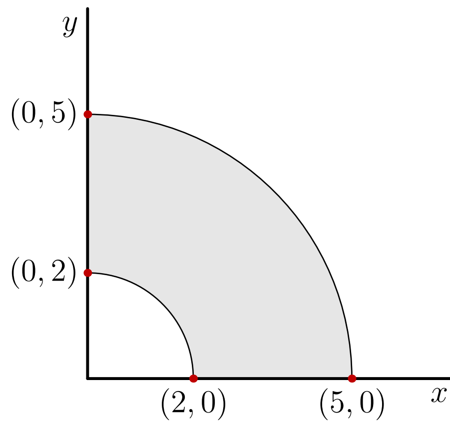
$$2xy = 2r^2 \sin\theta \cos\theta = r^2 \sin(2\theta). \tag{D.101}$$

Integral u polarnim koordinatama

$$\iint_D 2xydA = \int_0^{\pi/2} \int_2^5 r^2 \sin(2\theta) r dr d\theta \tag{D.102}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) \int_2^5 r^3 dr \tag{D.103}$$

$$= -\frac{1}{2} \cos(2\theta)\Big|_0^{\pi/2} \frac{1}{4} r^4\Big|_2^5 = \frac{609}{4}. \tag{D.104}$$



Slika D.11: Područje integracije omeđeno je kružnicama radijusa $r_1 = 2$ i $r_2 = 5$ u prvom kvadrantu.

Primjer D.6

Koristeći polarne koordinate izračunajte integral

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy, \tag{D.105}$$

ako je D površina omeđena kružnicom radijusa $r = 1$.

Granice integracije zadanog područja

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{i} \quad 0 \leq r \leq 1. \tag{D.106}$$

Podintegralna funkcija u polarnim koordinatama

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2} = e^{r^2}, \tag{D.107}$$

a zatim i integral u polarnim koordinatama

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta. \tag{D.108}$$

Rješenje integrala glasi

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{r^2} r dr = 2\pi \int_0^1 e^{r^2} \frac{1}{2} dr^2 \tag{D.109}$$

$$= \pi \int_0^1 e^t dt = \pi \left[e - 1\right]. \tag{D.110}$$

Klasična mehanika 1

Drugi dio

Centralne sile. Problem dva tijela.

September 24, 2015

Sadržaj

*

1 Centralne sile

1.1 Uvod

Pretpostavimo da se čestica mase m giba u polju centralne sile

$$\vec{F} = -\nabla U(r) = -\frac{dU}{dr}\vec{r}_0 = f(r)\vec{r}_0. \tag{1.1}$$

Koordinatni sustav postavimo tako da se centar sile nalazi u ishodištu sustava. Privlačna sila djeluje na česticu u smjeru ishodišta, dok odbojna sila djeluje u smjeru suprotnom od ishodišta. U slučaju privlačne sile vektor $\vec{F}$ ima smjer suprotan radij-vektoru pa funkcija $f(r)$ mora biti negativna. Obratno, ako je sila odbojna vektor $\vec{F}$ ima smjer radij-vektora pa funkcija $f(r)$ mora biti pozitivna. Vremenska promjena momenta količine gibanja čestice jednaka je momentu sile $\vec{N}$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(r)\vec{r}_0. \tag{1.2}$$

Vektori $\vec{r}$ i $\vec{r}_0$ su paralelni pa je moment količine gibanja čestice u polju centralne sile sačuvan

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0 \Longrightarrow \vec{M} = \text{konst.} \tag{1.3}$$

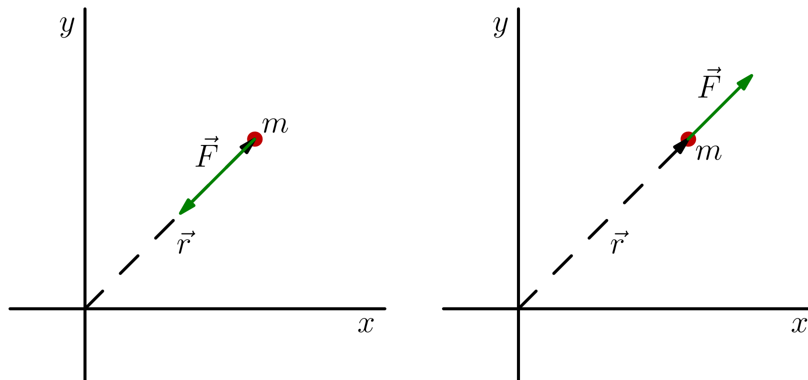
Iz definicije momenta količine gibanja

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \tag{1.4}$$

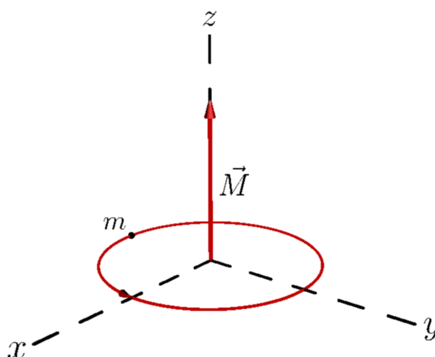
slijedi da su vektori položaja $\vec{r}$, brzine $\dot{\vec{r}}$ i momenta količine gibanja $\vec{M}$ međusobno okomiti. Vektor položaja je u svakom trenutku okomit na konstantni vektor $\vec{M}$ pa možemo zaključiti da se putanja čestice nalazi u ravnini okomitoj na vektor $\vec{M}$. Koordinatni sustav orijentiramo tako da os z ima smjer vektora $\vec{M}$. Putanja čestice se nalazi u xy ravnini pa možemo koristiti dvodimenzionalni polarni sustav definiran koordinatama r i ϕ.

1.2 Drugi Keplerov zakon

Drugi Keplerov zakon glasi: radij-vektor čestice koja se giba u polju centralne sile u jednakim vremenskim intervalima prebriše jednake površine. Lako se možemo



Slika 1.1: Primjer privlačne (lijevo) i odbojne (desno) centralne sile.



Slika 1.2: Čestica se giba u ravnini okomitoj na vektor momenta količine gibanja.

uvjeriti da ova tvrdnja slijedi iz sačuvanja momenta količine gibanja. Ako radij-vektor prijeđe infinitezimalni kut $d\phi$, prijeđena površina iznosi

$$dA = \frac{1}{2}r \cdot rd\phi = \frac{1}{2}r^2 d\phi. \tag{1.5}$$

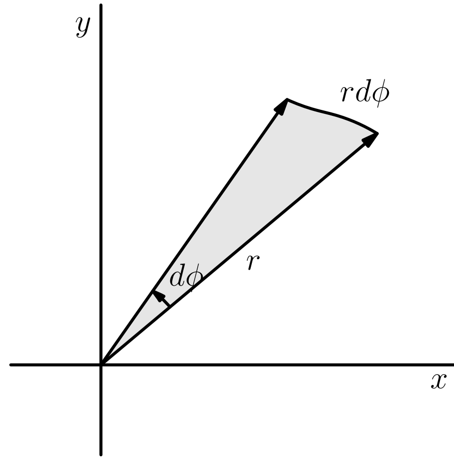
Podijelimo diferencijal površine s diferencijalom vremena da bi došli do plošne brzine

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}. \tag{1.6}$$

Uočimo da je prethodna veličina proporcionalna z komponenti momenta količine gibanja u cilindričnim koordinatama

$$M_z = mr^2\dot{\phi}. \tag{1.7}$$

Koordinatni sustav smo orjentirali tako da vektor momenta količine ima smjer osi z pa vrijedi $M_z = M$. Moment količine gibanja je konstantan jer se čestica giba pod



Slika 1.3: Pri infinitezimalnoj promjeni kuta $d\phi$, radij-vektor prebriše površinu $\frac{1}{2}r^2 d\phi$.

utjecajem centralne sile. Došli smo da zaključka da je plošna brzina konstantna

$$\dot{A} = \frac{M}{2m}. \tag{1.8}$$

Bitno je naglasiti da drugi Keplerov zakon vrijedi za sve centralne sile jer je za sačuvanje momenta količine gibanja dovoljno da sila bude centralna.

1.3 Integracija jednadžbi gibanja

Polazna točka je Newtonova jednadžba za česticu na koju djeluje centralna sila $\vec{F}$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = f(r)\vec{r}_0. \tag{1.9}$$

Iskoristimo li izraz za akceleraciju u polarnim koordinatama, jednadžbu gibanja čestice možemo napisati u sljedećem obliku

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\vec{r}_0 + m\left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)\vec{\phi}_0 = f(r)\vec{r}_0. \tag{1.10}$$

Prethodna jednadžba u sebi sadrži dvije skalarne jednadžbe. Izjednačimo članove koji stoje uz pojedine jedinične vektore

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) = f(r), \tag{1.11}$$

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0. \tag{1.12}$$

Jedn. (1.12) rješavamo metodom separacije varijabli

$$2\frac{\dot{r}}{r} = -\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}. \tag{1.13}$$

Koristeći pravilo lančanog deriviranja možemo napisati

$$2\frac{d}{dt}\ln r = -\frac{d}{dt}\ln\dot{\phi} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left[\ln\left(r^2\dot{\phi}\right)\right] = 0. \tag{1.14}$$

Sačuvana veličina $mr^2\dot{\phi}$ odgovara z komponenti momenta količine gibanja u cilindričnim koordinatama. U prošlom odjeljku smo zaključili da je moment količine gibanja sačuvan ako se čestica giba pod utjecajem centralne sile. Sačuvanje smjera momenta količine gibanja smo već iskoristili pri orjentaciji koordinatnog sustava. Jedn. (1.14) odgovara sačuvanju iznosa momenta količine gibanja

$$M_z \equiv M = mr^2\dot{\phi} = \text{konst.} \tag{1.15}$$

Iz prethodne jednadžbe izrazimo kutnu brzinu $\dot{\phi} = M/mr^2$ i uvrstimo je u jedn. (1.11)

$$\ddot{r} - \frac{M^2}{m^2r^3} = \frac{1}{m}f(r). \tag{1.16}$$

Sila je jednaka negativnoj derivaciji potencijala $U(r)$ pa prethodnu jednadžbu možemo napisati u sljedećem obliku

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left[U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}\right]. \tag{1.17}$$

Problem smo sveli na gibanje u efektivnom jednodimenzionalnom potencijalu

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \tag{1.18}$$

Pomnožimo li jednadžbu gibanja s $\dot{r}$

$$m\ddot{r}\dot{r} = -\frac{dU_{eff}(r)}{dr}\dot{r} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)\right] = 0, \tag{1.19}$$

opet se vraćamo na sačuvanje energije

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = E. \tag{1.20}$$

Prvi član u prethodnoj relaciji je je uvijek veći od nule ili jednak nuli pa j se čestica može gibati samo u onom dijelu ravnine za koji vrijedi $U_{eff}(r) \leq E$. Kao i u slučaju

jednodimenzionalnog gibanja, takvo područje zovemo klasično dozvoljeno područje. Granične točke klasično dozvoljenog područja, odnosno točke obrata, definirane su uvjetom $U_{eff}(r_{t.o.}) = E$. Bitno je primjetiti da u slučaju gibanja pod utjecajem centralne sile, čestica u točkama obrata ne stoji jer je komponenta brzine $v_\phi = r\dot{\phi}$ konačna. Vektor brzine je u točkama obrata okomit na radij-vektor čestice. Izraz za energiju daje radijalnu brzinu čestice

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}, \tag{1.21}$$

pri čemu pozitivni predznak odgovara povećanju, a negativni smanjenju radijalne udaljenosti s vremenom. Integriramo jednadžbu (1.21)

$$t - t_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r')\right] - \frac{M^2}{m^2 r'^2}}}, \tag{1.22}$$

pri čemu je $r_0 = r(t_0)$ početna radijalna udaljenost čestice. Invertiranjem jednadžbe (1.22) došli bi do putanje $r(t)$. Iz relacije $\dot{\phi} = M/mr^2$ izrazimo diferencijal kuta $d\phi$

$$d\phi = \frac{M}{mr^2}dt \Longrightarrow \phi - \phi_0 = \frac{M}{m}\int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{r^2(t')}. \tag{1.23}$$

Kut ϕ može ili monotono rasti ($M > 0$) ili monotono padati s vremenom ($M < 0$). U oba slučaja $\dot{\phi}$ nikad ne mijenja predznak, odnosno orbita se stalno namata u istom smjeru. Predznak kutne brzine možemo odrediti iz početnih uvjeta. Označimo s $\vec{r}_0$ početni radijus-vektor, a s $\vec{v}_0$ početnu brzinu čestice. Neka je α kut između ta dva vektora. Gibanje se odvija u xy ravnini pa vrijedi

$$\vec{M} = m\vec{r}_0 \times \vec{v}_0 = m r_0 v_0 \sin\alpha \vec{k}. \tag{1.24}$$

Ako se kut α nalazi u intervalu $[0, \pi]$ ($\sin\alpha > 0$), moment količine gibanja ima smjer $+\vec{k}$ (sl. 1.4 i 1.5). Orbita se namata u pozitivnom smjeru (suprotno od kazaljke na satu). Obratno, ako je kut α u intervalu $[\pi, 2\pi]$ ($\sin\alpha < 0$), moment količine gibanja ima smjer $-\vec{k}$ (sl. 1.6 i 1.7). Orbita se namata u negativnom smjeru (u smjeru kazaljke na satu). Eliminiramo li vrijeme iz jednadžbe (1.21)

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\frac{d}{d\phi} = \dot{\phi}\frac{d}{d\phi}, \tag{1.25}$$

te iskoristimo sačuvanje iznosa momenta količine gibanja možemo povezati operator deriviranja po vremenu s operatorom deriviranja po kutu ϕ

$$\frac{d}{dt} = \frac{M}{mr^2}\frac{d}{d\phi} \Longrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{M}{mr^2}\frac{dr}{d\phi}. \tag{1.26}$$

Jednadžba koja određuje trajektoriju u prostoru dana je s

$$\frac{M}{mr^2}\frac{dr}{d\phi} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}}. \tag{1.27}$$

Uz $M > 0$ pozitivni predznak odgovara povećanju varijable r s kutem ϕ i obratno. Separiramo varijable r i ϕ

$$d\phi = \pm\frac{M}{mr^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}}}, \tag{1.28}$$

i konačno integriramo jednadžbu gibanja

$$\phi - \phi_0 = \pm\int_{r_0}^{r}\frac{M dr'}{r'^2\sqrt{2m\left[E - U(r')\right] - \frac{M^2}{r'^2}}}, \tag{1.29}$$

pri čemu je $r_0 = r(\phi_0)$.

1.4 Tipovi orbita u centralnom potencijalu

1.4.1 Omeđene orbite

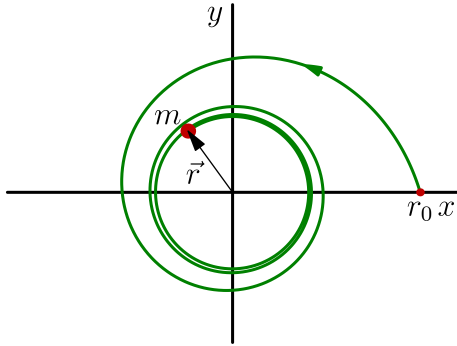
Za orbitu kažemo da je omeđena ako se čestica giba između dvije točke obrata. Točku u kojoj čestica dolazi najbliže centru sile zovemo pericentar (r_{min}), dok točku koja odgovara maksimalnoj udaljenosti od centra sile zovemo apocentar (r_{max}). Primjer efektivnog potencijala u kojem su za negativne energije orbite omeđene nalazi se na sl. 1.8. Čestica se giba u ravnini između kružnica radijusa r_{min} i r_{max}. Kut između dva pericentra dvostruko je veći od kuta između pericentra i apocentra jer su orbite simetrične s obzirom na pravac koji prolazi kroz ishodište i bilo koju točku obrata

$$\Delta\Phi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{M dr}{r^2\sqrt{2m\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{r^2}}}. \tag{1.30}$$

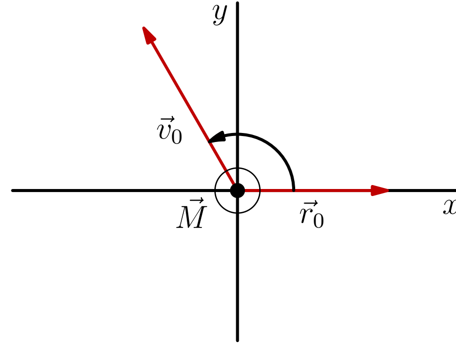
Iznos kuta $\Delta\Phi$ ovisi o obliku potencijala $U(r)$. Razlikujemo dva karakteristična slučaja:

1. Postoje cijeli brojevi m i n za koje vrijedi

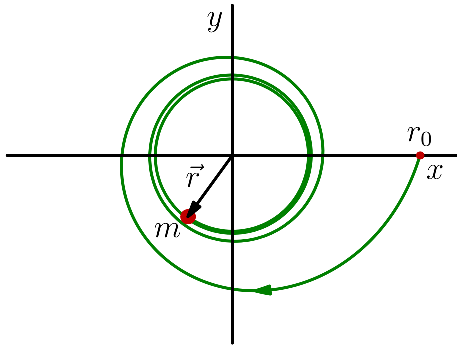
$$\Delta\Phi = 2\pi\frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathcal{Z}. \tag{1.31}$$



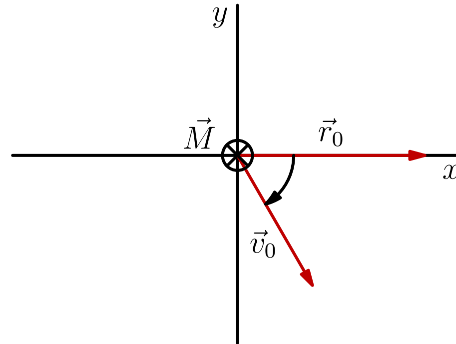
Slika 1.4: Orbita čestice namata se u pozitivnom smjeru tj. u smjeru suprotnom od kazaljke na satu ($\dot{\phi} > 0$).



Slika 1.5: Vektori početnog položaja i brzine čestice. Moment količine gibanja ima smjer $+\vec{k}$.



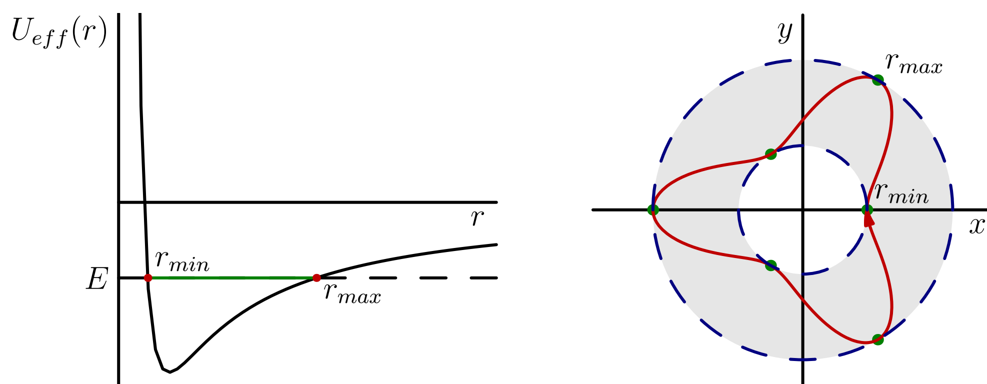
Slika 1.6: Orbita čestice namata se u negativnom smjeru tj. u smjeru kazaljke na satu ($\dot{\phi} > 0$).



Slika 1.7: Vektori početnog položaja i brzine čestice. Moment količine gibanja ima smjer $-\vec{k}$.

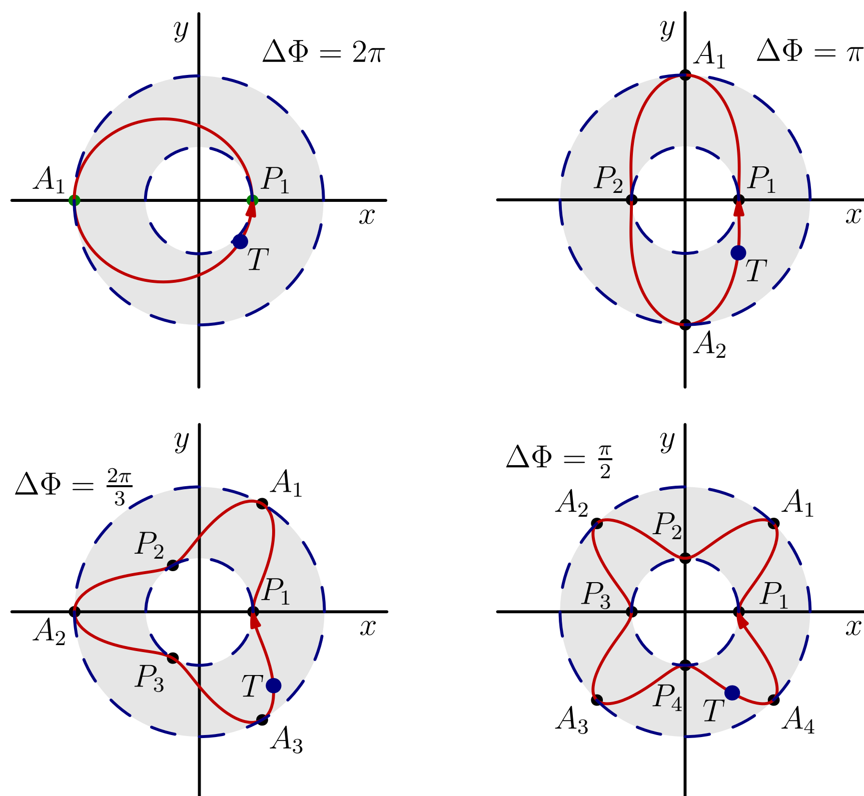
Nakon n uzastopnih prolazaka kroz pericentre, čestica se ponovo nalazi u početnoj točki T. Putanja se u tom trenu zatvara sama u sebe, pa takav tip orbite zovemo zatvorena orbita. Jedini potencijali za koje su omeđene orbite uvijek zatvorene su Keplerov potencijal i potencijal harmoničkog oscilatora. Nekoliko primjera zatvorenih orbita nalazi se na sl. 1.9 i 1.10. Na prvoj slici je kut između dva pericentra uvijek manji od 2π pa čestica mora nekoliko puta proći kroz pericentre da bi došla u početnu točku T. Obratno, na drugoj slici je kut između dva pericentra 4π. Stoga čestica mora dva puta proći kroz ravninu (kut 4π) da bi se putanja zatvorila.

2. Omjer kuta $\Delta\Phi$ i broja π je iracionalan broj. Čestica nikada ne prolazi dva puta kroz istu točku tj. putanja se nikad ne zatvara. Takav tip orbite zovemo

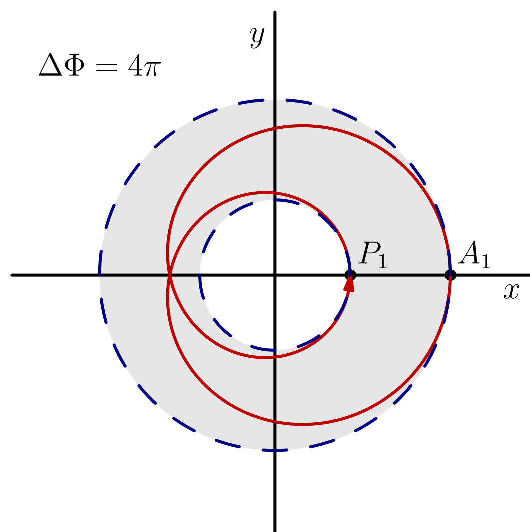


Slika 1.8: Primjer efektivnog potencijala u kojem je gibanje omeđeno ukoliko je energija čestice negativna. Putanja čestice nalazi se unutar prstena vanjskog radijusa r_{max} i unutarnjeg radijusa r_{min}.

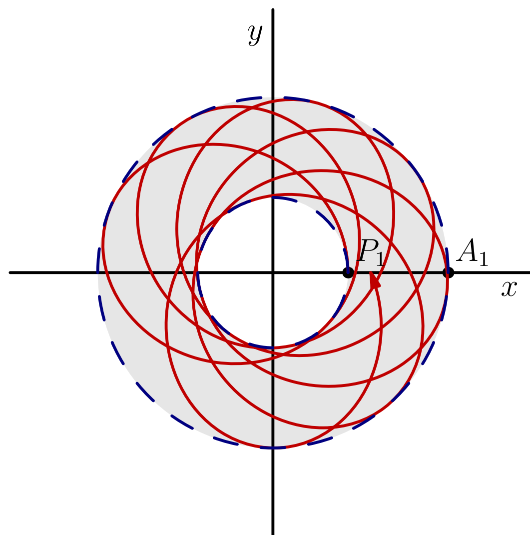
otvorena orbita, a karakteriziraju je dva perioda čiji omjer nije racionalan broj (kvaziperiodičko gibanje).



Slika 1.9: Primjeri zatvorenih orbita. Na svakoj slici je označen kut između dva pericentra tj. dva apocentra.



Slika 1.10: Primjer zatvorene orbite za koju kut između dva pericentra iznosi $\Delta\Phi = 4\pi$. Radij-vektor čestice mora prebrisati kut 4π da bi čestica opet bila u pericentru.



Slika 1.11: Primjer otvorene orbite. Čestica nikada ne prolazi dva puta kroz istu točku.

1.4.2 Neomeđene orbite

Za orbitu kažemo da je neomeđena ako se čestica može beskonačno udaljiti od centra sile.

1.4.3 Pad u centar polja

Da bi čestica pala u centar polja, sila u blizini ishodišta mora biti dovoljno privlačna da bi nadvladala centrifugalnu barijeru $U_{cf}(r) = M^2/2mr^2$. Drugim riječima, potencijal $U(r)$ u blizini ishodišta mora težiti u $-\infty$ brže nego $1/r^2$. Čestica u tom slučaju pada u centar polja po nekoj od spiralnih putanja. Druga mogućnost je gibanje uz uvjet $M = 0$ jer tada centrifugalna barijera nestaje, ali u tom slučaju je putanja pravac.

1.5 Diferencijalna jednadžba orbite

Rješenje jednadžbe gibanja

$$\ddot{r} - \frac{M^2}{m^2 r^3} = \frac{f(r)}{m}, \tag{1.32}$$

odgovara putanji $r(t)$. Da bi našli orbitu čestice $r(\phi)$ moramo eliminirati vrijeme iz jednadžbe gibanja (1.32). Iskoristimo li pravilo lančanog deriviranja i relaciju $M = mr^2\dot{\phi}$, možemo napisati

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{M}{mr^2}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{M}{mr^2}\frac{d}{d\phi}\right). \tag{1.33}$$

Primjenimo operator $\frac{d^2}{dt^2}$ na položaj čestice

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{M}{mr^2}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{M}{mr^2}\frac{dr}{d\phi}\right) = \frac{M^2}{m^2r^4}\frac{d^2r}{d\phi^2} - \frac{2M^2}{m^2r^5}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2, \tag{1.34}$$

a zatim uvrstimo $\ddot{r}$ u jedn. (1.32)

$$\frac{d^2r}{d\phi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - r = \frac{mr^4}{M^2}f(r). \tag{1.35}$$

Supstitucijom $u = 1/r$ jednadžba se pojednostavljuje

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{m}{M^2u^2}f(1/u). \tag{1.36}$$

Primjer 1.1

Čestica mase m giba se u polju centralne sile

$$U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2}, \quad k, h > 0.$$

Pokažite da efektivni potencijal ima minimum i nađite njegov položaj. Skicirajte efektivni potencijal i odredite područje dostupno čestici. Rezultate izrazite pomoću bezdimenzionalne konstante Ω i konstante dimenzije duljine $\tilde{p}$ koje su definirane relacijama

$$\Omega^2 = 1 + \frac{2mh}{M^2}, \quad \tilde{p} = \frac{M^2\Omega^2}{mk}.$$

Efektivni potencijal je zbroj potencijala $U(r)$ i centrifugalnog člana

$$U_{eff}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2} + \frac{M^2}{2mr^2} = -\frac{k}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}\left(1 + \frac{2mh}{M^2}\right) = -\frac{k}{r} + \frac{k\tilde{p}}{2r^2}. \tag{1.37}$$

Da bi skicirali efektivni potencijal, promotrimo ponašanje funkcije $U_{eff}(r)$ na malim i velikim udaljenostima od ishodišta. Kada $r \to 0$ dominira član proporcionalan s $1/r^2$ pa efektivni potencijal teži k $+\infty$, dok u slučaju $r \to \infty$ dominira član proporcionalan s $1/r$. Efektivni potencijal se asimptotski približava nuli s negativne strane. Ekstremalnu točku efektivnog potencijala možemo naći koristeći uvjet

$$\left.\frac{dU_{eff}}{dr}\right|_{r_0} = 0 \Longrightarrow \frac{k}{r_0^2} - \frac{k\tilde{p}}{r_0^3} = 0 \Longrightarrow r_0 = \tilde{p}. \tag{1.38}$$

Provjerimo je li u pitanju minimum ili maksimum.

$$\left.\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}\right|_{r_0} = -\frac{2k}{r_0^3} + \frac{3k\tilde{p}}{r_0^4} = \frac{k}{\tilde{p}^3}. \tag{1.39}$$

Druga derivacija je pozitivna pa efektivni potencijal u točki $r = \tilde{p}$ ima minimum koji iznosi

$$U_{min} = -\frac{k}{2\tilde{p}}. \tag{1.40}$$

Područje dostupno čestici (klasično dozvoljeno područje) je ono u kojem je energija čestice veća od efektivnog potencijala. Rubne točke dozvoljenog područja (točke obrata) određene su uvjetom

$$U_{eff}(r) = E \Longrightarrow -\frac{k}{r} + \frac{k\tilde{p}}{2r^2} = E. \tag{1.41}$$

Pomnožimo li prethodnu jednadžbu s r^2, doći ćemo do kvadratne jednadžbe

$$Er^2 + kr - k\frac{\tilde{p}}{2} = 0 \Longrightarrow r_{1,2} = -\frac{k}{2E} \pm \frac{k}{2E}\sqrt{1 + \frac{2E}{k}\tilde{p}}. \qquad (1.42)$$

Koristeći formulu za minimum efektivnog potencijala, prethodnu formulu možemo napisati preglednije

$$r_{1,2} = \tilde{p}\frac{|U_{min}|}{E}\left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{|U_{min}|}}\right]. \qquad (1.43)$$

Izraz pod korijenom je sigurno pozitivan jer energija mora biti veća od minimuma potencijala. Ovisno o energiji čestice, razlikujemo tri slučaja.

1. Energija čestice je negativna.

$$r_{1,2} = \tilde{p}\frac{|U_{min}|}{|E|}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{|E|}{|U_{min}|}}\right]. \qquad (1.44)$$

   Oba rješenja su pozitivna, što znači da postoje obje točke obrata. Točka r_1 odgovara najmanjoj udaljnosti na koju se čestica može približiti centru sile (pericentar), dok točka r_2 odgovara najvećoj udaljnosti od centra sile koju čestica moče postići (apocentar).

2. Energija čestice jednaka je nuli. Kvadratna jednadžba se svodi na običnu linearnu jednadžbu s jednim rješenjem

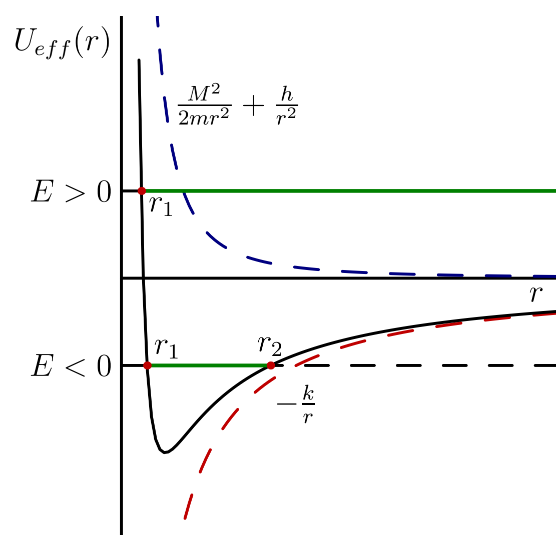
$$r_1 = \tilde{p}/2, \qquad (1.45)$$

   koje odgovara pericentru. Putanja više nije omeđena jer se čestica se može beskonačno udaljiti od centra sile.

3. Energija čestice je pozitivna. Samo jedno rješenje je pozitivno i ono odgovara pericentru

$$r_1 = \tilde{p}\frac{|U_{min}|}{E}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{E}{|U_{min}|}}\right]. \qquad (1.46)$$

   Druga točka obrata ne postoji, a putanja je kao i u prethodnom slučaju neomeđena.



Slika 1.12: Skica efektivnog potencijala. Ukoliko je energija čestice negativna, postoje klasično dozvoljeno područje odgovara intervalu $[r_1, r_2]$. Za pozitivne vrijednosti energije gibanje nije omeđeno, a klasično dozvoljeno područje odgovara intervalu $[r_1, \infty\rangle$.

Primjer 1.2

Čestica mase m giba se u polju centralne sile

$$U(r) = \frac{k}{r} - \frac{h}{r^2}, \quad k, h > 0,$$

a pritom vrijedi $M^2 < 2mh$. Pokažite da efektivni potencijal ima maksimum i nađite njegov položaj. Skicirajte efektivni potencijal i odredite područje dostupno čestici. Rezultate izrazite pomoću bezdimenzionalne konstante γ i konstante dimenzije duljine $\tilde{p}$ koje su definirane relacijama

$$\gamma^2 = \frac{2mh}{M^2} - 1, \quad \tilde{p} = \frac{M^2\gamma^2}{mk}.$$

Efektivni potencijal je suma potencijala $U(r)$ i centrifugalnog člana

$$U_{eff}(r) = \frac{k}{r} - \frac{h}{r^2} + \frac{M^2}{2mr^2} = \frac{k}{r} - \frac{M^2}{2mr^2}\left(\frac{2hm}{M^2} - 1\right) = \frac{k}{r} - \frac{k\tilde{p}}{2r^2}. \tag{1.47}$$

Da bi skicirali efektivni potencijal, promotrimo ponašanje funkcije $U_{eff}(r)$ na malim i velikim udaljenostima od ishodišta. Kada $r \to 0$ dominira član proporcionalan s $1/r^2$ pa efektivni potencijal teži k $-\infty$, dok u slučaju $r \to \infty$ dominira član proporcionalan s $1/r$. Efektivni potencijal se asimptotski približava nuli s pozitivne strane. Ekstremalnu točku efektivnog potencijala možemo naći koristeći uvjet

$$\left.\frac{dU_{eff}}{dr}\right|_{r_0} = 0 \Longrightarrow -\frac{k}{r_0^2} + \frac{k\tilde{p}}{r_0^3} = 0 \Longrightarrow r_0 = \tilde{p}. \tag{1.48}$$

Provjerimo je li u pitanju minimum ili maksimum.

$$\left.\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}\right|_{r_0} = \frac{2k}{r_0^3} - \frac{3k\tilde{p}}{r_0^4} = -\frac{k}{\tilde{p}^3}. \tag{1.49}$$

Druga derivacija je negativna pa efektivni potencijal u točki $r = \tilde{p}$ ima maksimum koji iznosi

$$U_{max} = \frac{k}{2\tilde{p}}. \tag{1.50}$$

Računamo točke obrata da bi odredili područje dostupno čestici

$$U_{eff}(r) = E \Longrightarrow \frac{k}{r} - \frac{k\tilde{p}}{2r^2} = E. \tag{1.51}$$

Pomnožimo li prethodnu jednadžbu s r^2, doći ćemo do kvadratne jednadžbe

$$Er^2 - kr + k\frac{\tilde{p}}{2} = 0 \Longrightarrow r_{1,2} = \frac{k}{2E} \pm \frac{k}{2E}\sqrt{1 - \frac{2E}{k}\tilde{p}}. \tag{1.52}$$

Koristeći formulu za maksimum efektivnog potencijala, prethodni izraz možemo napisati preglednije

$$r_{1,2} = \tilde{p}\frac{U_{max}}{E}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{E}{U_{max}}}\right]. \tag{1.53}$$

Ovisno o energiji čestice, razlikujemo četiri slučaja.

1. Energija je negativna. Samo jedno rješenje kvadratne jednadžbe je pozitivno

$$r_1 = \tilde{p}\frac{U_{max}}{|E|}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{|E|}{U_{max}}}\right]. \tag{1.54}$$

   i ono odgovara maksimalnoj udaljenosti od centra sile koju čestica može postići. Bez obzira na početne uvjete čestica će prije ili kasnije pasti u centar polja.

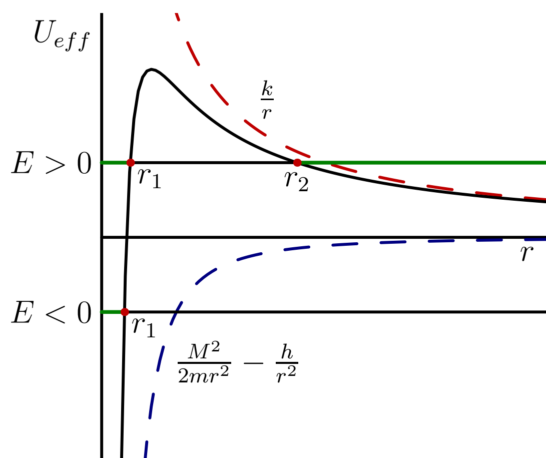
2. Energija čestice jednaka je nuli. Svi zaključci su isti kao u prethodnom slučaju, samo točku obrata dobijemo rješavajući linearnu jednadžbu $r_1 = \tilde{p}/2$.

3. Energija čestice je pozitivna, ali manja od maksimuma efektivnog potencijala. Oba rješenja kvadratne jednadžbe su pozitivna

$$r_{1,2} = \tilde{p}\frac{U_{max}}{E}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{E}{U_{max}}}\right]. \tag{1.55}$$

   Uočimo da je izraz pod korijenom sigurno pozitivan jer je energija manja od maksimuma efektivnog potencijala $U_{max} = k/(2\tilde{p})$. Postoje dvije točke obrata i dva dozvoljena područja. Prva mogućnost je da se čestica giba u intervalu $[0, r_1]$ (i na kraju padne u centar polja), dok je druga mogućnost neomeđeno gibanje u intervalu $[r_2, \infty\rangle$. Čestica ne može prelaziti iz jednog dozvoljenog područja u drugo jer postoji barijera.

4. Energija čestice jednaka je maksimumu efektivnog potencijala. Izraz pod korijenom u jedn. (1.55) iščezava. Postoji samo jedno rješenje koje odgovara položaju maksimuma $r_1 = \tilde{p}$. Dozvoljena područja odgovaraju intervalima $[0, \tilde{p}\rangle$ i $\langle\tilde{p}, \infty\rangle$ i izoliranoj točki $r = \tilde{p}$.



Slika 1.13: Skica efektivnog potencijala. Ukoliko je energija čestice negativna, klasično dozvoljeno područje odgovara intervalu $[0, r_1]$. Za pozitivne vrijednosti energije (ali manje od maksimuma efektivnog potencijala) postoje dva dozvoljena područja $[0, r_1]$ i $[r_2, \infty >$. Daljnjim povećavanjem energije, čestici postaje dostupan cijeli raspon radijalnih udaljenosti $[0, \infty\rangle$.

5. Energija čestice je veća od maksimuma efektivnog potencijala. Izraz pod korijenom u jedn. (1.55) postaje negativan pa ne postoji niti jedno rješenje kvadratne jednadžbe. Čestici postaje dostupan cijeli raspon radijalnih udaljenosti $[0, \infty\rangle$.

Primjer 1.3

Čestica mase m i energije $E < 0$ giba se u polju centralne sile

$$U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2}, \quad k, h > 0.$$

Izračunajte period radijalnih oscilacija čestice.

Energija čestice je negativne pa ona oscilira između točaka obrata r_{min} i r_{max}. Polazimo od jedn. (1.22)

$$\tau = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}}, \tag{1.56}$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da čestica pri punoj oscilaciji mora prijeći put od pericentra do apocentra i natrag (faktor 2 u prethodnoj relaciji). Uvrstimo zadani potencijal

$$\tau = \sqrt{2m} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{rdr}{\sqrt{-|E|r^2 + kr - \left(\frac{M^2}{2m} + h\right)}}, \tag{1.57}$$

i primjetimo da su nultočke izraza pod korijenom upravo točke obrata. Stoga možemo napisati

$$-|E|r^2 + kr - \left(\frac{M^2}{2m} + h\right) = -|E|(r - r_{min})(r - r_{max}). \tag{1.58}$$

Rješenje integrala

$$\tau = \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{rdr}{\sqrt{-r^2 + (r_{min} + r_{max})r - r_{min}r_{max}}}, \tag{1.59}$$

možemo pronaći u tablicama (Bronštejn). Nakon sređivanja, dolazimo do perioda gibanja čestice

$$\tau = \pi k \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \tag{1.60}$$

Zanimljivo je uočiti da period ne ovisi o parametru potencijala h, kao ni o momentu količine gibanja čestice.

Primjer 1.4

Čestica mase m giba se bez utjecaja vanjskih sila. Integrirajte jednadžbu gibanja, ako se u početnom trenutku čestica nalazi na osi x, udaljena je za a od ishodišta i ima brzinu $\vec{v}_0$ koja zatvara kut α s osi x.

Da bi integrirali jednadžbu gibanja, potrebni su nam moment količine gibanja i energiju čestice. U oba slučaja radi se o konstantama gibanja pa ih možemo izračunati iz početnih uvjeta

$$\vec{M} = m\vec{r}_0 \times \vec{v}_0 = mav_0 \sin\alpha \vec{k} \Longrightarrow M \equiv |\vec{M}| = mav_0 \sin\alpha, \tag{1.61}$$

$$E = T + U = T = \frac{m}{2}v_0^2, \tag{1.62}$$

pri čemu smo iskoristili podatak da je čestica slobodna ($U = 0$). Na početku gibanja čestica se nalazi na osi x ($\phi_0 = 0$) i udaljena je za a od ishodišta ($r_0 = a$). Općeniti izraz za orbitu (1.29) svodi se na

$$\phi = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int_a^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - \frac{M^2}{2mr'^2}}} = a\sin\alpha \int_a^r \frac{dr'}{r' \sqrt{r'^2 - a^2 \sin^2\alpha}}. \tag{1.63}$$

Integral možemo pronaći u tablicama (Bronštejn) ili izračunati u Mathematici

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - c^2}} = \frac{1}{c} \arccos\frac{c}{x}, \quad c = \text{konst.} \tag{1.64}$$

Nakon sređivanja izraza (1.63) dolazimo do jednadžbe pravca u polarnim koordinatama

$$r = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha - \phi)}. \tag{1.65}$$

Ovaj rezultat smo mogli i očekivati jer se slobodna čestica giba po pravcu. Da bi provjerili točnost rezultata, prvo napišemo putanju u Kartezijevim koordinatama

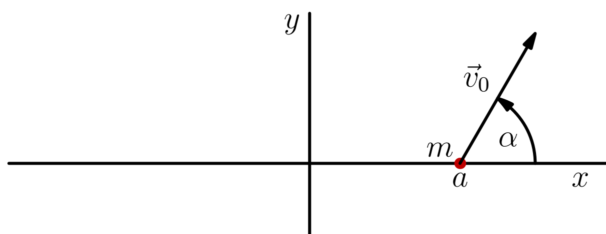
$$x = a + (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = (v_0 \sin\alpha)t, \tag{1.66}$$

a zatim eliminiramo vrijeme

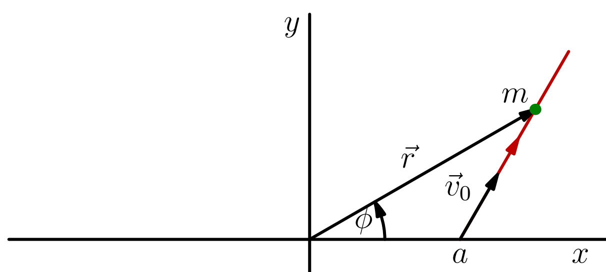
$$x = a + \cot\alpha y \Longrightarrow r\cos\phi = a + \cot\alpha r \sin\phi. \tag{1.67}$$

Pomnožimo li cijeli izraz sa $\sin\alpha$ i prepoznamo formulu za sinus razlike kuteva vraćamo se točno na putanju (1.65)

$$r\cos\phi\sin\alpha - r\sin\alpha\sin\phi = a\sin\alpha \Longrightarrow r = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha - \phi)}. \tag{1.68}$$



Slika 1.14: Čestica se na početku gibanja nalazi na osi x, na udaljenosti a od ishodišta, a njezina početna brzina zatvara kut α s osi x.



Slika 1.15: Slobodna čestica giba se po pravcu. Dostupno joj je područje kuteva $0 \leq \phi < \alpha$.

Primjer 1.5

Čestica mase m giba se bez utjecaja vanjskih sila. Riješite diferencijalnu jednadžbu orbite ako se u početnom trenutku čestica nalazi na osi x, udaljena je za a od ishodišta i ima brzinu $\vec{v}_0$ koja zatvara kut α s osi x.

Na česticu ne djeluju vanjske sile pa se diferencijalna jednadžba orbite svodi na jednadžbu harmoničkog oscilatora

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0. \tag{1.69}$$

Opće rješenje ove jednadžbe je linearna kombinacija trigonometrijskih funkcija

$$u(\phi) = A\sin\phi + B\cos\phi. \tag{1.70}$$

Da bi odredili konstante A i B, moramo iskoristiti zadane početne uvjete. Čestica se na početku nalazi na osi x ($\phi = 0$), na udaljenosti a od ishodišta

$$u(\phi = 0) = \left.\frac{1}{r}\right|_{\phi=0} = \frac{1}{a}. \tag{1.71}$$

Početna brzina čestice iznosi v_0 i zatvara kut α s osi x

$$\vec{v}_0 = v_0\cos\alpha\vec{i} + v_0\sin\alpha\vec{j}. \tag{1.72}$$

Ranije smo izveli vezu između komponenata brzine u Kartezijevim i polarnim koordinatama

$$v_r(\phi) = v_x\cos\phi + v_y\sin\phi, \tag{1.73}$$
$$v_\phi(\phi) = -v_x\sin\phi + v_y\cos\phi. \tag{1.74}$$

U početnom trenutku čestica se nalazi na osi x ($\phi = 0$)

$$v_r(\phi = 0) = v_x = v_0\cos\alpha, \tag{1.75}$$
$$v_\phi(\phi = 0) = v_y = v_0\sin\alpha. \tag{1.76}$$

Brzina u polarnim koordinatama glasi

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\phi}\vec{\phi}_0. \tag{1.77}$$

Dakle, u početnom trenutku vrijedi

$$\dot{r}(\phi = 0) = v_0\cos\alpha \quad \text{i} \quad a\dot{\phi}(\phi = 0) = v_0\sin\alpha. \tag{1.78}$$

Sada možemo izračunati i drugi početni uvjet

$$\left.\frac{du}{d\phi}\right|_{\phi=0} = \left.\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{\phi=0} = -\left.\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right|_{\phi=0}. \tag{1.79}$$

Iskoristimo pravilo lančanog deriviranja

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}}. \tag{1.80}$$

Vratimo se jedn. (1.79)

$$\left.\frac{du}{d\phi}\right|_{\phi=0} = -\left.\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\phi}}\right|_{\phi=0} = -\frac{1}{a^2}\frac{v_0\cos\alpha}{\frac{v_0\sin\alpha}{a}} = -\frac{1}{a}\cot\alpha. \tag{1.81}$$

Konačno, oba početna uvjeta glase

$$u(\phi=0) = \frac{1}{a} \quad \text{i} \quad \left.\frac{du}{d\phi}\right|_{\phi=0} = -\frac{1}{a}\cot\alpha. \tag{1.82}$$

Uvrstimo vrijednost kuta $\phi = 0$ u rješenje (1.70)

$$u(\phi=0) = B \Longrightarrow B = \frac{1}{a}. \tag{1.83}$$

Deriviramo rješenje (1.70) i uvrstimo $\phi = 0$

$$\left.\frac{du}{d\phi}\right|_{\phi=0} = A \Longrightarrow A = -\frac{1}{a}\cot\alpha. \tag{1.84}$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe orbite koje odgovara zadanim početnim uvjetima glasi

$$u(\phi) = -\frac{1}{a}\cot\alpha\sin\phi + \frac{1}{a}\cos\phi \tag{1.85}$$

$$u(\phi) = \frac{1}{a\sin\alpha}\left[\sin\alpha\cos\phi - \cos\alpha\sin\phi\right] \tag{1.86}$$

$$u(\phi) = \frac{\sin(\alpha-\phi)}{a\sin\alpha}. \tag{1.87}$$

Orbita čestice predstavlja pravac u polarnim koordinatama

$$r(\phi) = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha-\phi)}, \tag{1.88}$$

čime smo reproducirali rezultat prethodnog zadatka.

Primjer 1.6

Čestica mase m i energije E giba se u polju centralne sile

$$U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2}, \quad k, h > 0.$$

Izvedite izraz za orbitu čestice. Rezultat izrazite pomoću bezdimenzionalnih konstanti Ω i $\tilde{e}$, kao i konstante dimenzije duljine $\tilde{p}$ koje su definirane sljedećim relacijama

$$\Omega^2 = 1 + \frac{2mh}{M^2}, \quad \tilde{e} = \sqrt{1 + \frac{2\tilde{p}E}{k}}, \quad \tilde{p} = \frac{M^2\Omega^2}{mk}.$$

Zadatak je zapravo nastavak zadatka 1 u kojem smo već izveli izraz za efektivni potencijal

$$U_{eff} = -\frac{k}{r} + \frac{k\tilde{p}}{2r^2}. \tag{1.89}$$

Orbitu čestice možemo naći pomoću formule (1.29)

$$\phi = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{eff}(r)}} + C = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r\sqrt{Er^2 + kr - \frac{k\tilde{p}}{2}}} + C. \tag{1.90}$$

Integral ovog tipa možemo naći u tablicama (Bronštejn)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx + 2c}{x\sqrt{-\Delta}}, \quad c < 0, \Delta < 0, \tag{1.91}$$

pri čemu je $\Delta = 4ac - b^2$. U našem slučaju vrijedi $a = E$, $b = k$, $c = -k\tilde{p}/2$, $\Delta = -2k\tilde{p}E - k^2$. Parametar c je očito negativan, a možemo se uvjeriti da isto vrijedi za parametar Δ

$$\Delta = 2k\tilde{p}\left[-E - \frac{k}{2\tilde{p}}\right] = -2k\tilde{p}\left[E - E_{min}\right]. \tag{1.92}$$

E_{min} označava najmanju energiju koju čestica može imati (minimum efektivnog potencijala, vidi zadatak 1). Energija čestice je uvijek veća od E_{min} pa je parametar Δ sigurno negativan. Vratimo se integralu

$$\phi = \frac{M}{\sqrt{2m}}\sqrt{\frac{2}{k\tilde{p}}} \arcsin \frac{kr - k\tilde{p}}{r\sqrt{2k\tilde{p}E + k^2}} + C \tag{1.93}$$

Nakon sređivanja, izraz za orbitu možemo napisati u sljedećem obliku

$$r = \frac{\tilde{p}}{1 + \tilde{e}\cos\left(\Omega\phi - \phi_0\right)}. \tag{1.94}$$

Da bi odredili konstantu ϕ_0, moramo imati zadanu jednu točku u ravnini kroz koju orbita prolazi.

Primjer 1.7

Čestica mase m giba se u centralnom potencijalu

$$U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2}, \quad k, h > 0.$$

Izračunajte energiju i zakretni impuls čestice ako je zadano: čestica se u početnom trenutku nalazi na osi x, udaljena je za a od ishodišta, početna brzina čestice iznosi $\sqrt{\frac{k}{2am}}$ i zatvara kut $\alpha = 45^0$ s osi x. Izračunajte konstantu ϕ_0 u formuli (1.94) iz prethodnog zadatka i skicirajte orbitu. Parametar potencijala h povezan je parametrima a i k relacijom $h = \frac{3}{8}ak$.

Koristeći zadane početne uvjete računamo energiju i moment količine gibanja

$$M \equiv |\vec{M}| = m|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0| = mav_0 \sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{mak}, \tag{1.95}$$

$$E = T + U = \frac{m}{2}v_0^2 - \frac{k}{r_0} + \frac{h}{r_0^2} = \frac{k}{4a} - \frac{k}{a} + \frac{3k}{8a} = -\frac{3}{8a}k. \tag{1.96}$$

Sada možemo izračunati parametre Ω, $\tilde{p}$ i $\tilde{e}$. definirane u prošlom zadatku

$$\Omega^2 = 1 + \frac{2mh}{M^2} = 4 \tag{1.97}$$

$$\tilde{p} = \frac{M^2\Omega^2}{mk} = a \tag{1.98}$$

$$\tilde{e} = \sqrt{1 + \frac{2\tilde{p}E}{k}} = \frac{1}{2} \tag{1.99}$$

Uvrstimo parametre orbite u formulu (1.94)

$$r(\phi) = \frac{a}{1 + \frac{1}{2}\cos(2\phi - \phi_0)}, \tag{1.100}$$

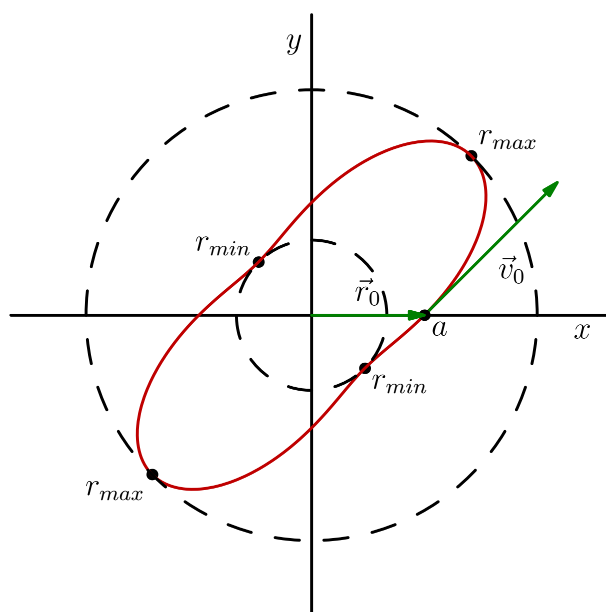
a zatim još iskoristimo podatak da putanja čestice prolazi kroz točku $(\phi = 0, r = a)$

$$a = \frac{a}{1 + \frac{1}{2}\cos(-\phi_0)} \Longrightarrow \cos(-\phi_0) = 0 \Longrightarrow \phi_0 = -\frac{\pi}{2}. \tag{1.101}$$

Putanja čestice glasi

$$r(\phi) = \frac{a}{1 - \frac{1}{2}\sin 2\phi}. \tag{1.102}$$

Nazivnik nema nul-točaka jer je funkcija sinus poprima samo vrijednosti iz intervala $[-1, 1]$.



Slika 1.16: Orbita čestice, Označeni su položaju pericentara i apocentara, kao i početni položaj i brzina čestice.

Primjer 1.8

Čestica mase m giba se u centralnom potencijalu

$$U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2}, \quad k, h > 0.$$

Izračunajte energiju i zakretni impuls čestice ako se ona u početnom trenutku nalazi na osi x, udaljena je za a od ishodišta, početna brzina čestice iznosi $\sqrt{\frac{2k}{am}}$ i zatvara kut $\alpha = 45^0$ s osi x. Parametar potencijala h povezan je parametrima a i k relacijom $h = \frac{3}{2}ak$. Izračunajte kostantu ϕ_0 u formuli (1.94) iz zadatka 6 i skicirajte orbitu.

Koristeći zadane početne uvjete računamo energiju i moment količine gibanja

$$M \equiv |\vec{M}| = m|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0| = mav_0 \sin\alpha = \sqrt{mak}, \tag{1.103}$$

$$E = T + U = \frac{m}{2}v_0^2 - \frac{k}{r_0} + \frac{h}{r_0^2} = \frac{k}{a} - \frac{k}{a} + \frac{3k}{2a} = \frac{3}{2a}k. \tag{1.104}$$

Sada možemo izračunati parametre Ω, $\tilde{p}$ i $\tilde{e}$.

$$\Omega^2 = 1 + \frac{2mh}{M^2} = 4, \tag{1.105}$$

$$\tilde{p} = \frac{M^2\Omega^2}{mk} = 4a, \tag{1.106}$$

$$\tilde{e} = \sqrt{1 + \frac{2\tilde{p}E}{k}} = \sqrt{13}. \tag{1.107}$$

Putanja prolazi kroz točku $(\phi = 0, r = a)$

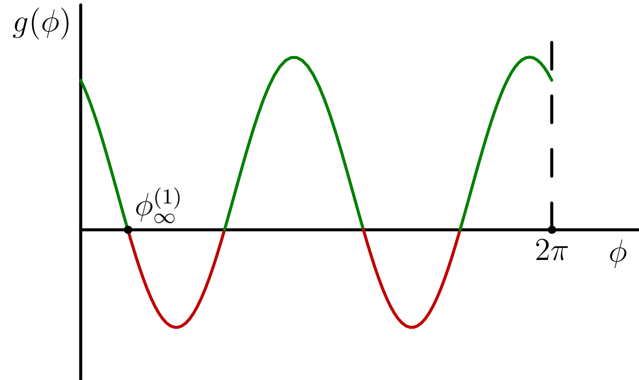
$$\frac{4a}{1 + \sqrt{13}\cos(-\phi_0)} = a \Longrightarrow \cos(-\phi_0) = \frac{3}{\sqrt{13}} \Longrightarrow \phi_0 \approx -34^0. \tag{1.108}$$

Nultočke nazivnika orbite određene su jednadžbom

$$\cos(\Omega\phi - \phi_0) = -\frac{1}{\tilde{e}}. \tag{1.109}$$

Funkcija kosinus je negativna u drugom i trećem kvadrantu pa rješenja prethodne jednadžbe možemo napisati u obliku

$$\Omega\phi_\infty^{(i)} - \phi_0 = \pi \mp \arccos(1/\tilde{e}) + 2k\pi, \quad k \in \mathcal{Z}. \tag{1.110}$$



Slika 1.17: Graf funkcije $g(\phi)$. Čestica se može naći samo u području ravnine gdje je funkcija $g(\phi)$ pozitivna. Uz dane početne uvjete čestica se može naći samo u intervalu $\left[0, \phi_\infty^{(1)}\right\rangle$.

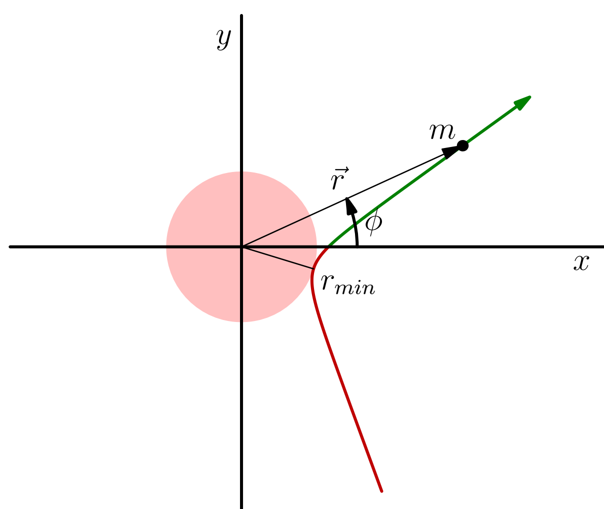
Radijalna koordinata polarnog sustava je po definiciji pozitivna pa se čestica može naći samo u onim područjima ravnine u kojima je nazivnik orbite pozitivan

$$g(\phi) \equiv 1 + \tilde{e} \cos(\Omega\phi - \phi_0) > 0. \tag{1.111}$$

S grafa funkcije $g(\phi)$ na sl. 8 vidimo da je čestici koja kreće s osi x dostupan interval kuteva $\left[0, \phi_\infty^{(1)}\right\rangle$ pri čemu kut $\phi_\infty^{(1)}$ iznosi

$$\phi_\infty^{(1)} = \frac{1}{\Omega}\left(\pi - \arccos(1/\tilde{e}) + \phi_0\right) \approx 36^0. \tag{1.112}$$

Uz drugačiji izbor početnog kuta ϕ, čestica bi se mogla naći i u drugim dopuštenim intervalima.



Slika 1.18: Skica putanje čestice. Zelenom bojom je označen dio putanje koji se realizira uz dane početne uvjete, dok je crvenom bojom označen dio putanje koji prethodi početnom trenutku.

Primjer 1.9

Čestica mase m giba se u potencijalu

$$U(r) = \frac{k}{r} - \frac{h}{r^2}, \quad k, h > 0.$$

Energija čestice iznosi $\frac{3}{4}$ maksimuma efektivnog potencijala, a u početnom trenutku ona se nalazi na osi x u točki obrata r_1 (vidi zadatak 2). Rješavajući diferencijalnu jednadžbu orbite, nađite orbitu čestice.

Da bi napisali diferencijalnu jednadžbu orbite, trebao izračunati silu koja djeluje na česticu

$$f(r) = -\frac{dU}{dr} = \frac{k}{r^2} - \frac{2h}{r^3} \Longrightarrow f(1/u) = ku^2 - 2hu^3. \tag{1.113}$$

Uvrstimo silu f u diferencijalnu jednadžbu orbite (1.36)

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{mk}{M^2} + \frac{2mh}{M^2}u, \tag{1.114}$$

i iskoristimo definiciju konstante γ iz zadatka 2

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} - \gamma^2 u = -\frac{mk}{M^2}. \tag{1.115}$$

Radi se o nehomogenoj diferencijalnoj jednadžbi drugog reda. Opće rješenje pripadne homogene jednadžbe glasi

$$u_h = Ae^{\gamma\phi} + Be^{-\gamma\phi}, \tag{1.116}$$

dok je jedno od mogućih partikularnih rješenja konstanta

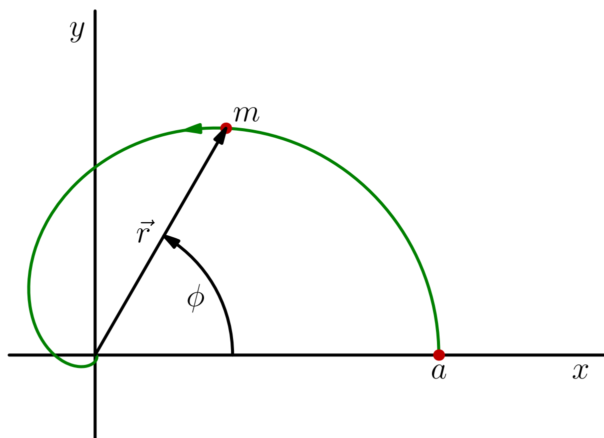
$$u_p = C = \frac{mk}{\gamma^2 M^2} = \frac{1}{\tilde{p}}. \tag{1.117}$$

Ukupno rješenje je suma općeg rješenja homogene jednadžbe i partikularnog rješenja

$$u(\phi) = Ae^{\gamma\phi} + Be^{-\gamma\phi} + \frac{1}{\tilde{p}}. \tag{1.118}$$

Konstante A i B možemo izračunati iz početnih uvjeta. Čestica se na početku gibanja nalazi na osi x ($\phi = 0$) u točki obrata r_1. Koristeći rezultate zadatka 2 i podatak $E = \frac{3}{4}U_{max}$, dolazimo do zaključka

$$r(\phi = 0) = r_1 = \frac{2}{3}\tilde{p}. \tag{1.119}$$



Slika 1.19: Čestica pada u centar sile po spirali.

Dodatno, znamo da je radijalna komponenta brzine u točki obrata jednaka nuli pa početni uvjeti glase

$$u(\phi = 0) = \frac{3}{2\tilde{p}}, \qquad \left.\frac{du}{d\phi}\right|_{\phi=0} = 0. \tag{1.120}$$

. Iz drugog početnog uvjeta slijedi da su konstante A i B jednake. Vratimo se prvom početnom uvjetu

$$A + B + \frac{1}{\tilde{p}} = \frac{3}{2\tilde{p}} \Longrightarrow A = B = \frac{1}{4\tilde{p}}. \tag{1.121}$$

Orbitu možemo napisati u sljedećem obliku

$$r(\phi) = \frac{2\tilde{p}}{2 + \cosh(\gamma\phi)}. \tag{1.122}$$

Nazivnik orbite monotono raste pa se udaljenost čestice od centra polja monotno smanjuje. Čestica po spiranoj putanji pada u centar polja.

Primjer 1.10

Čestica mase m giba se u potencijalu

$$U(r) = \frac{k}{r} - \frac{h}{r^2}, \quad k, h > 0.$$

Energija čestice iznosi $\frac{3}{4}$ maksimuma efektivnog potencijala, a u početnom trenutku ona se nalazi na osi x u točki obrata r_2 (vidi zadatak 2). Rješavajući diferencijalnu jednadžbu orbite, nađite orbitu čestice.

Zadatak je potpuno jednak prethodnom sve do određivanja konstanti A i B. U ovom primjeru čestica se nalazi u točki obrata r_2, čiji položaj glasi

$$r_2 = \tilde{p}\frac{U_{max}}{E}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{E}{U_{max}}}\right] = 2\tilde{p}. \tag{1.123}$$

Početni uvjeti su malo drugačiji od prethodnog primjera

$$u(\phi = 0) = \frac{1}{2\tilde{p}}, \quad \left.\frac{du}{d\phi}\right|_{\phi=0} = 0. \tag{1.124}$$

. Iz drugog početnog uvjeta slijedi da su konstante A i B jednake, što u kombinaciji s prvim početnim uvjetom daje

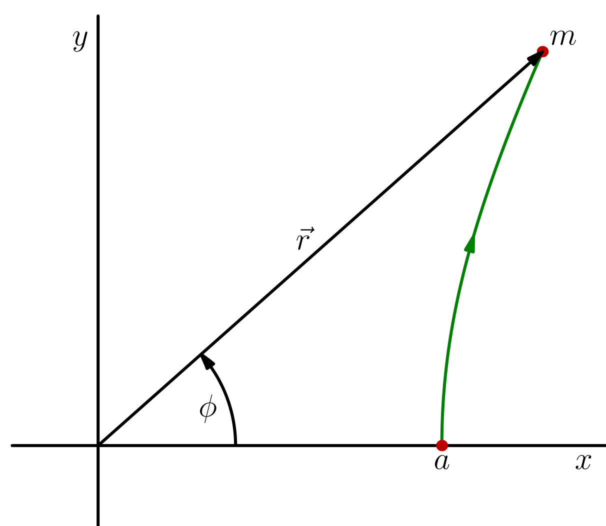
$$A + B + \frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1}{2\tilde{p}} \Longrightarrow A = B = -\frac{1}{4\tilde{p}}. \tag{1.125}$$

Orbitu možemo napisati u sljedećem obliku

$$r(\phi) = \frac{2\tilde{p}}{2 - \cosh(\gamma\phi)}. \tag{1.126}$$

Za razliku od prethodnog primjera, orbita nije omeđena jer se čestica beskonačno udaljava od centra sile kada kut ϕ dostigne vrijednost

$$\phi = \frac{1}{\gamma}\text{Arch}(2) \tag{1.127}$$



Slika 1.20: Čestica odlazi u beskonačnosti po spiralnoj putanji.

1.6 Račun smetnje

1.6.1 Stabilne i nestabilne kružne orbite

Pretpostavimo da se čestica mase m giba u polju centralne sile $\vec{f} = f(r)\vec{r}_0$. Čestica se može gibati po kružnoj orbiti ako su ispunjeni sljedeći uvjeti

1. efektivni potencijal ima ekstrem (minimum ili maksimum),
2. energija čestice jednaka je ekstremu potencijala.

Da bi efektivni potencijal imao ekstrem u točki $r = r_0$, njegova prva derivacija mora biti jednaka nuli

$$U'_{eff}(r)\big|_{r=r_0} = U'(r_0) - \frac{M^2}{mr_0^3} = 0 \Longrightarrow f(r_0) = -\frac{M^2}{mr_0^3}. \tag{1.128}$$

Sila u točki r_0 mora biti privlačna, da bi gibanje po kružnici bilo moguće. Razlikujemo dva tipa kružnih orbita:

1. Stabilna kružna orbita. Efektivni potencijal ima minimum, a mala promjena energije čestice vodi na orbitu koja više nije kružna, ali je i dalje omeđena i ne odstupa mnogo od početne kružne orbite.
2. Nestabilna kružna orbita. Efektivni potencijal ima maksimum. Mala promjena energije čestice vodi na orbitu koja više nije omeđena. Nakon dovoljno dugo vremena čestica će se potpuno udaljiti od početne kružne orbite.

Postavlja se pitanje kada je kružna orbita stabilna, a kada nestabilna. Efektivni potencijal ima minimum u točki r_0 ako mu je druga derivacija pozitivna

$$\left.\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}\right|_{r_0} = \left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r_0} + \frac{3M^2}{mr_0^4} = -\left.\frac{df}{dr}\right|_{r_0} + \frac{3M^2}{mr_0^4} > 0. \tag{1.129}$$

Iskoristimo činjenicu da je točka r_0 ekstrem efektivnog potencijala

$$f(r_0) = -\frac{M^2}{mr_0^3} \Longrightarrow \frac{3M^2}{mr_0^4} = -\frac{3}{r_0}f(r_0). \tag{1.130}$$

Uvjet stabilnosti kružne orbite glasi

$$\frac{df}{df} < -\frac{3}{r_0}f(r_0). \tag{1.131}$$

Ukoliko pretpostavimo da se sila u blizini kružne orbite ponaša kao

$$f(r) = -\frac{k}{r^{n+1}}. \tag{1.132}$$

Uvjet stabilnosti (1.130) ograničava moguće vrijednosti parametra n

$$-\frac{(n+1)k}{r_0^{n+2}} < -\frac{3k}{r_0^{n+2}} \Longrightarrow n < 2. \tag{1.133}$$

Kružna orbita će biti stabilna ako je u pitanju privlačni potencijal koji pada sporije od $1/r^2$.

1.6.2 Mala odstupanja od stabilne kružne orbite

Ograničimo se na situaciju kada se čestica giba po stabilnoj kružnoj orbiti radijusa r_0. Povećamo li energiju čestice za mali iznos, orbita više neće biti kružna, ali će i dalje biti omeđena. Pericentar i apocentar nove orbite će se pritom malo razlikovati od radijusa početne kružne orbite. Mala odstupanja od početne orbite možemo parametrizirati funkcijom $r_1(\phi)$

$$r(\phi) = r_0 + r_1(\phi), \quad r_1 \ll r_0. \tag{1.134}$$

Prisjetimo se diferencijalne jednadžbe orbite

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{m}{M^2u^2} f(1/u). \tag{1.135}$$

Varijablu $u = 1/r$ možemo razviti u Taylorov red oko ravnotežne vrijednosti $u_0 = 1/r_0$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 + r_1(\phi)} = \frac{1}{r_0}\frac{1}{1+\frac{r_1}{r_0}} \approx \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{r_1}{r_0}\right). \tag{1.136}$$

Možemo zaključiti da vrijedi relacija $u \approx u_0 + u_1(\phi)$, pri čemu smo uveli funkciju $u_1(\phi) = -r_1/r_0^2$. U diferencijalnoj jednadžbi orbite pojavljuje se funkcija

$$J(u) = -\frac{m}{M^2u^2} f(1/u), \tag{1.137}$$

koju također možemo razviti u Taylorov red oko vrijednosti u_0

$$J(u) = J(u_0) + J'(u_0)(u - u_0) + \cdots \tag{1.138}$$

Uvrstimo Taylorov razvoj funkcije $J(u)$ u jedn. (1.135)

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = J(u_0) + J'(u_0)(u - u_0), \tag{1.139}$$

a zatim iskoristimo jednakost sile $f(r)$ i centrifugalne sile u početnoj kružnoj orbiti da bi izračunali $J(u_0)$

$$f(r_0) = -\frac{M^2}{mr_0^3} \Longrightarrow \frac{mr_0^2}{M^2} f(r_0) = -\frac{1}{r_0} \Longrightarrow J(u_0) = -\frac{m}{M^2 u_0^2} f(1/u_0) = u_0. \quad (1.140)$$

Jedn. (1.135) smo time sveli na sljedeći oblik

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u - u_0 = J'(u_0)(u - u_0). \quad (1.141)$$

U sljedećem koraku definiramo odstupanje od ravnotežne vrijednosti $x = u - u_0$ i uvrstimo ga u prethodnu jednadžbu

$$\frac{d^2 x}{d\phi^2} + [1 - J'(u_0)]\, x = 0. \quad (1.142)$$

Ukoliko je ispunjen uvjet

$$\omega^2 \equiv 1 - J'(u_0) > 0, \quad (1.143)$$

radi se o jednadžbi harmoničkog oscilatora. Još nam je preostalo izračunati derivaciju funkcije $J(u)$ u točki ravnoteže

$$J'(u) = \frac{2m}{M^2 u_0^3} f(1/u_0) - \frac{m}{M^2 u_0^2} f'(1/u_0) \frac{-1}{u_0^2} = -2 - \frac{f'(1/u_0)}{u_0 f(1/u_0)}. \quad (1.144)$$

Pritom smo ponovno iskoristili uvjet jednakosti sile f i centrifugalne sile u početnoj kružnoj orbiti. Frekvenciju ω sada možemo izraziti i pomoću radijusa početne orbite r_0

$$\omega^2 = 3 + \frac{r_0}{f(r_0)} f'(r_0). \quad (1.145)$$

Da bi putanja pri malim odstupanjima od kružnice ostala zatvorena, omjer frekvencija ω mora biti racionalan broj

$$\omega = \frac{m}{m}, \quad m, n \in \mathcal{Z}. \quad (1.146)$$

Ukoliko promatramo samo male oscilacije oko kružnih orbita, zatvorene orbite su moguće za široku klasu potencijala. U općenitom slučaju omeđene orbite su uvijek zatvorene samo za Keplerov potecijal i potencijal harmoničkog oscilatora (Bertrandov teorem).

Primjer 1.11

Čestica mase m giba se po krivulji bliskoj kružnici radijusa r_0 u centralnom polju

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}, \quad 0 < n < 2.$$

Nađite orbitu. Koji uvjet mora biti ispunjen da bi orbita bila zatvorena?

Na ovom primjeru možemo ilustrirati općenit postupak opisan u prethodnom odjeljku. Da bi se čestica gibala po kružnoj orbiti radijusa r_0, točka $r = r_0$ mora predstavljati minimum efektivnog potencijala

$$U'_{eff}(r_0) = 0 \Longrightarrow n\frac{\alpha}{r_0^{n+1}} = \frac{M^2}{mr_0^3}. \tag{1.147}$$

Silu koja djeluje na česticu možemo izravcunati koristeći zadani potencijal

$$f(r) = -\frac{dU}{dr} = -\frac{\alpha n}{r^{n+1}}. \tag{1.148}$$

Napišemo diferencijalnu jednadžbu orbite

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{mn\alpha}{M^2}u^{n-1}. \tag{1.149}$$

Desnu stranu razvijemo u Taylorov red oko ravnotežne točke $u_0 = 1/r_0$

$$u^{n-1} = u_0^{n-1} + \frac{1}{1!}(n-1)u_0^{n-2}(u-u_0) + \cdots \tag{1.150}$$

Zadržimo li se na linearnom članu diferencijalna jednadžba poprima oblik

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{mn\alpha}{M^2}u_0^{n-1} + \frac{mn\alpha}{M^2}(n-1)u_0^{n-2}(u-u_0). \tag{1.151}$$

U sljedećem koraku iskoristimo uvjet ravnoteže (1.147) $mn\alpha u_0^{n-2} = M^2$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = u_0 + (n-1)(u-u_0) \Longrightarrow \frac{d^2u}{d\phi^2} + (2-n)(u-u_0) = 0, \tag{1.152}$$

a na kraju definiramo odstupanja od točke ravnoteže kao novu varijablu $x = u - u_0$. Problem se sveo na harmonički oscilator frekvencije $\omega = \sqrt{2-n}$

$$\frac{d^2x}{d\phi^2} + (2-n)x = 0. \tag{1.153}$$

Orjentiramo li koordinatni sustav tako da vrijedi $u(\phi = 0) = u_0$, rješenje glasi

$$u(\phi) = u_0 + a \sin(\omega\phi) \tag{1.154}$$

Da bi orbita bila zatvorena, frekvencija ω mora biti racionalan broj

$$\omega = \sqrt{2-n} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathcal{Z} \Longrightarrow n = 2 - \frac{p^2}{q^2}. \tag{1.155}$$

Za skicu orbite potrebna nam je radijalna varijabla

$$r(\phi) = \frac{1}{u_0 + a \sin\omega\phi} = \frac{1}{u_0} \frac{1}{1 + \frac{a}{u_0} \sin\omega\phi}. \tag{1.156}$$

Još jednom napravimo Taylorov razvoj

$$r(\phi) = r_0 \left(1 - a r_0 \sin\omega\phi\right). \tag{1.157}$$

Kao ilustraciju, pogledajmo primjer Keplerovog potencijala ($n = 1$, $\omega = 1$). Ako čestici u kružnoj orbiti malo povećamo energiju, ona će se gibati po elipsi. Položaji pericentra i apocentra određeni su uvjetima

$$\sin\phi_p = 1 \Longrightarrow \phi_p = \frac{\pi}{2}, \quad \sin\phi_p = -1 \Longrightarrow \phi_p = \frac{3\pi}{2}. \tag{1.158}$$

Primjer 1.12

Za vrijeme šetnje svemirom astronaut Leonov baci poklopac objektiva kamere prema Zemlji. Opišite u prvom redu računa smetnje gibanje poklopca u odnosu na svemirski brod ako je poklopac izbačen brzinom 10 m/s. Brod se giba u kružnoj orbiti s periodom 1.4h.

Pri rješavanju zadatka koristit ćemo tri seta koordinata

- koordinate broda u odnosu na Zemlju: r_0, ϕ_0
- koordinate poklopca u odnosu na brod: r_1, ϕ_1
- koordinate poklopca u odnosu na Zemlju: r, ϕ

Veza između pojedinih koordinata glasi

$$r = r_0 + r_1 \quad \text{i} \quad \phi = \phi_0 + \phi_1. \tag{1.159}$$

Svemirski brod se giba u kružnoj orbiti. To znači da se njegova radijalna udaljenost od Zemlje i kutna brzina ne mijenjaju

$$\dot{r}_0 = 0 \quad \text{i} \quad \dot{\phi}_0 \equiv \Omega = \frac{2\pi}{\tau}. \tag{1.160}$$

Brzina kojom astronaut baca poklopac je mnogo manja od brzine broda pa očekujemo da se poklopac giba u orbiti bliskoj orbiti svemirskog broda

$$\dot{\phi}_1 \ll \dot{\phi}_0 \quad \text{i} \quad r_1 \ll r_0. \tag{1.161}$$

Jednadžbe gibanja u polju centralne sile glase

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{\alpha}{r^2} \tag{1.162}$$

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0. \tag{1.163}$$

Prvi red računa smetnje znači da u svim jednadžbama zadržavamo samo linearne članove malih veličina, dok kvadratične i sve ostale članove višeg reda zanemarujemo. Takav postupak obično zovemo linearizacija jednadžbi gibanja. Polazimo od jednadžbe gibanja (1.162). Prvi član je jednostavan jer je radijalna udaljenost broda od Zemlje konstantna

$$\ddot{r} = \ddot{r}_0 + \ddot{r}_1 = \ddot{r}_1. \tag{1.164}$$

U drugom članu zanemarujemo sve kvadratične članove malih veličina

$$r\dot{\phi}^2 = (r_0 + r_1)\left(\dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_1\right)^2 = (r_0 + r_1)\left(\dot{\phi}_0^2 + 2\dot{\phi}_0\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_1^2\right), \tag{1.165}$$

$$\Longrightarrow r\dot{\phi}^2 \approx r_0\Omega^2 + 2r_0\Omega\dot{\phi}_1 + r_1\Omega^2. \tag{1.166}$$

Desnu stranu jedn. (1.162) također razvijemo u Taylorov red

$$\frac{\alpha}{(r_0 + r_1)^2} = \frac{\alpha}{r_0^2}\frac{1}{\left(1 + \frac{r_1}{r_0}\right)^2} \approx \frac{\alpha}{r_0^2}\left(1 - 2\frac{r_1}{r_0} + \cdots\right) \tag{1.167}$$

Dobijenu jednadžbu možemo podijeliti u nulti i prvi red. Nulti red čine članovi koji uopće ne sadrže male veličine, dok prvi red čine članovi proporcionalni malim veličinama

- nulti red

$$r_0\Omega^2 = \frac{\alpha}{r_0^2} \Longrightarrow \Omega^2 = \frac{\alpha}{r_0^2} \tag{1.168}$$

- prvi red

$$\ddot{r}_1 + 2r_0\Omega\dot{\phi}_1 + \Omega^2 r_1 = -\frac{2\alpha}{r_0^3}r_1. \tag{1.169}$$

Da bi izračunali $\dot{\phi}_1$, iskoristimo jedn. (1.163)

$$2(\dot{r}_0 + \dot{r}_1)(\dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_1) + (r_0 + r_1)(\ddot{\phi}_0 + \ddot{\phi}_1) = 0. \tag{1.170}$$

Odbacimo sve kvadratične i više članove

$$2\dot{r}_1\Omega + r_0\ddot{\phi}_1 = 0 \Longrightarrow \ddot{\phi}_1 = -2\Omega\frac{\dot{r}_1}{r_0}. \tag{1.171}$$

Integriramo prethodnu jednadžbu

$$\dot{\phi}_1(t) - \dot{\phi}_1(0) = -2\frac{\Omega}{r_0}\left[r_1(t) - r_1(0)\right]. \tag{1.172}$$

Astronaut u početnom trenutku poklopac baca radijalno prema Zemlji, što znači da poklopac nema kutnu komponentu brzine u odnosu na brod, odnosno vrijedi

$$\dot{\phi}_1(0) = 0. \tag{1.173}$$

Na početku gibanja poklopac se nalazi u astronautovoj ruci

$$r_1(0) = 0. \tag{1.174}$$

Uvrstimo početne uvjete u jedn. (1.172)

$$\dot{\phi}_1(t) = -2\frac{\Omega}{r_0}r_1(t). \tag{1.175}$$

Uvrstimo li $\dot{\phi}_1(t)$ u jedn. (1.169), a zatim još iskoristimo rezultat iz nultog reda $\Omega^2 = \alpha/r_0^3$ dolazimo do standardne jednadžbe harmoničkog oscilatora

$$\ddot{r}_1 + \Omega^2 r_1 = 0. \tag{1.176}$$

Rješenje sadrži dvije konstante (A i B)

$$r_1(t) = A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t), \tag{1.177}$$

koje možemo odrediti iz početnih uvjeta. Poklopac je na početku u astronautovoj ruci

$$r_1(0) = 0 \Longrightarrow B = 0. \tag{1.178}$$

Astronaut poklopac baca prema Zemlji

$$\dot{r}_1(0) = -v_0 \Longrightarrow A = -\frac{v_0}{\Omega}. \tag{1.179}$$

Radijalna udaljenost poklopca od Zemlje mijenja se po formuli

$$r(t) = r_0 + r_1(t) = r_0 - \frac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t). \tag{1.180}$$

Sada možemo integrirati jedn. (1.175)

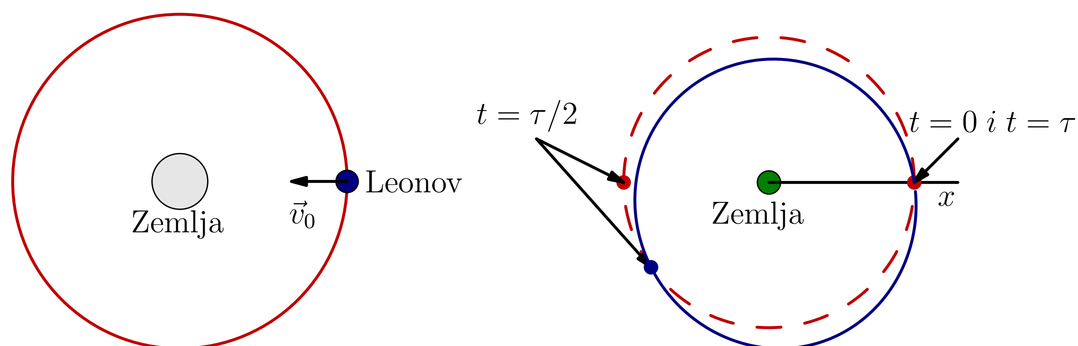
$$\phi_1(t) - \phi_1(0) = -2\frac{\Omega}{r_0}\int_0^t \left[-\frac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)\right]dt = \frac{2v_0}{r_0\Omega}\left[1 - \cos(\Omega t)\right] \tag{1.181}$$

Poklopac se u početnom trenutku nalazi kod astronauta pa vrijedi $\phi_1(0) = 0$. Konačno, koordinate poklopca u odnosu na Zemlju

$$r(t) = r_0 - \frac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t), \tag{1.182}$$

$$\phi(t) = \Omega t + \frac{2v_0}{r_0\Omega}\left[1 - \cos(\Omega t)\right]. \tag{1.183}$$

Amplituda radijalnih oscilacija poklopca iznosi $v_0/\Omega \approx 8km$. Nakon vremena $\tau = 2\pi/\Omega \approx 1.4$h poklopac opet dolazi u astronautovu ruku. Astronaut i poklopac se u početnom trenutku nalaze na osi x, kao i u trenutku $t = \tau$. U svim ostalim trenucima poklopac i astronaut su razdvojeni.



Slika 1.21: Lijevo: astronaut koji se nalazi u kružnoj orbiti baca poklopac prema Zemlji. Desno: orbita astronauta (crvena isprekidana linija) i poklopca (plava puna linija). Poklopac se vraća u ruku astronautu nakon što on jednom obiđe Zemlju.

2 Keplerov problem

2.1 Problem dvaju tijela

Promatramo sustav dvije čestice koje međudjeluju centralnom silom. Položaje čestica označimo s $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$, a potencijalnu funkciju s $U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. Jednadžbe gibanja glase

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\nabla_{\vec{r}_1} U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|), \tag{2.1}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\nabla_{\vec{r}_2} U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \tag{2.2}$$

U daljnjim razmatranjima iskoristit ćemo relaciju

$$\nabla_{\vec{r}_1} U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\nabla_{\vec{r}_2} U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \nabla_{\vec{r}} U(|\vec{r}|), \tag{2.3}$$

gdje je $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Zbrojimo jedn. (2.1) i (2.2)

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0 \Longrightarrow \frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = 0. \tag{2.4}$$

Kombinaciju u zagradi prepoznamo kao definiciju centra mase sustava

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = (m_1 + m_2) \vec{r}_{cm}. \tag{2.5}$$

Promatrajući jedn. (2.4), možemo zaključiti da se centar mase sustava može gibati samo jednoliko po pravcu. Izaberemo inercijalni sustav u kojem centar mase miruje u ishodištu

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \Longrightarrow \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2. \tag{2.6}$$

Kao drugu kombinaciju vektora $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$, linearno nezavisnu od $\vec{r}_{cm}$ biramo relativnu koordinatu $\vec{r}$. Oduzimanjem jedn. (2.1) i (2.2) dolazimo do jednadžbe gibanja koordinate $\vec{r}$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \nabla_{\vec{r}} U(|\vec{r}|). \tag{2.7}$$

Početni problem koji je uključivao dva tijela s masama m_1 i m_2 i centralnu silu $U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$, sveli smo na problem jednog tijela mase $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ koje se giba u centralnom polju $U(|\vec{r}|)$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = -\nabla_{\vec{r}} U(|\vec{r}|) \Longrightarrow \mu \ddot{\vec{r}} = -\nabla_{\vec{r}} U(|\vec{r}|). \tag{2.8}$$

Efektivnu masu

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \tag{2.9}$$

obično zovemo reducirana masa sustava.

Primjer 2.1

Dvije zvijezde jednakih masa gibaju se jedna oko druge pod utjecajem gravitacije. Ako se reducirana masa giba po orbiti

$$r(\phi) = \frac{2a}{1 + 0.5\cos\phi} \tag{2.10}$$

skcirajte orbite zvijezda.

Centar mase sustava dviju zvijezda miruje u ishodištu

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0 \Longrightarrow \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1. \tag{2.11}$$

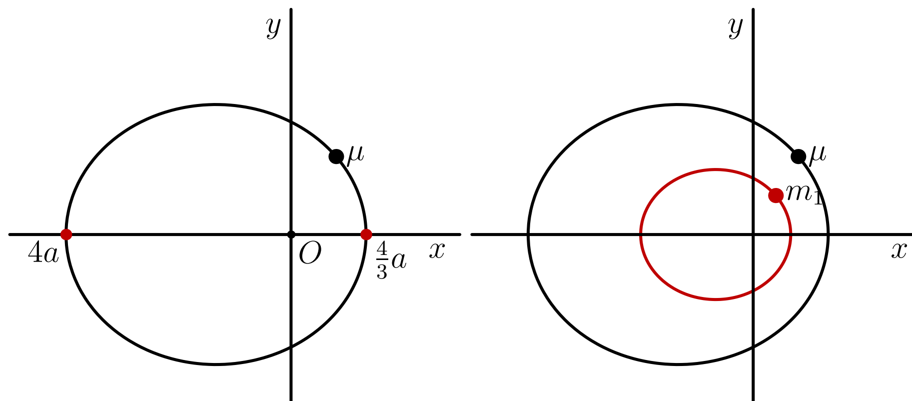
Definirali smo relativnu koordinatu

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Longrightarrow \frac{m_1 + m_2}{m_2}\vec{r}_1 = \vec{r} \Longrightarrow \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}. \tag{2.12}$$

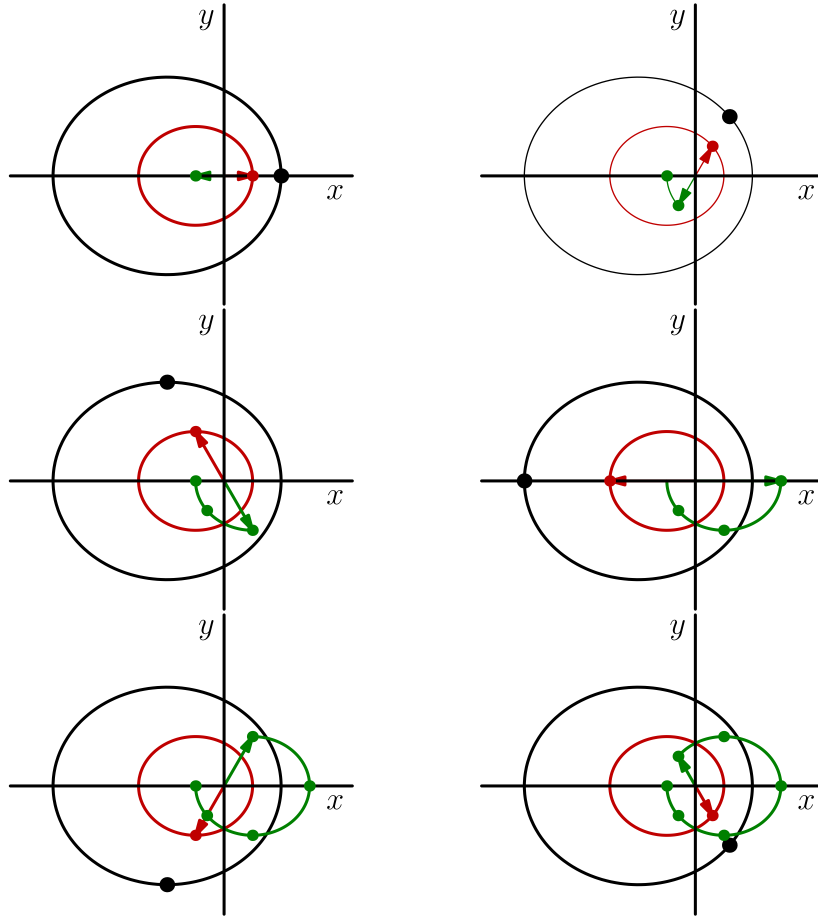
Uz zadane mase $m_1 = m_2 = m$ prethodna jednažba svodi se na

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{1}{2}\vec{r}. \tag{2.13}$$

Prvi korak je skica orbite reducirane mase $r(\phi)$ koja se giba po elipsi. Pericentar se nalazi na pozitivnoj strani osi x ($\phi = 0$) i udaljen je za $4a/3$ od ishodišta. Apocentar se nalazi na negativnoj strani osi x ($\phi = \pi$) i udaljen je za $4a$ od ishodišta.



Slika 2.1: Lijevo: Orbita reducirane mase definirana jedn. 2.10. Desno: Orbita prve zvijezde odgovara skaliranoj orbiti reducirane mase. Faktor skaliranja iznosi 0.5 jer zvijezde imaju jednake mase.



Slika 2.2: Konstrukcija točaka orbite druge zvijezde.

Drugi korak je skica orbite prve zvijezde. Radi se o skaliranoj orbiti reducirane mase s faktorom skaliranja 0.5 jer su mase zvijezda jednake. U trećem koraku označimo nekoliko točaka orbite druge zvijezde koristeći relaciju

$$\vec{r}_2 = -\vec{r}_1. \tag{2.14}$$

U zadnjem koraku spojimo točke u orbitu druge zvijezde. Možemo još primjetiti

$$r_2(\phi) = r_1(\phi - \pi) = \frac{1}{2} r(\phi - \pi) \Longrightarrow r_2(\phi) = \frac{2a}{1 - e\cos\phi}. \tag{2.15}$$

2.2 Analiza efektivnog potencijala u Keplerovom problemu

U prethodnom odjeljku smo problem dva tijela koja međudjeluju centralnom silom sveli na problem jednog tijela mase $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ koje se giba u centralnom polju $U(|\vec{r}|)$. Stoga nadalje možemo razmatrati gibanje jedne čestice u polju sile inverznog kvadrata

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{r}_0 \Longrightarrow U(r) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{k}{r}. \tag{2.16}$$

Slične probleme smo već susreli u prethodnom poglavlju. Da bi izveli zaključke o kvalitativnim svojstvima orbita dovoljno je analizirati ponašanje efektivnog potencijala

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2\mu r^2} = -\frac{k}{r} + \frac{M^2}{2\mu r^2}. \tag{2.17}$$

U blizini ishodišta dominira centrifugalni član (uz pretpostavku da vrijedi $M \neq 0$)

$$\lim_{r\to 0} U_{eff}(r) = +\infty, \tag{2.18}$$

dok daleko od ishodišta dominira član $-k/r$ pa tamo potencijal teži k nuli s negativne strane

$$\lim_{r\to\infty} U_{eff}(r) = -0. \tag{2.19}$$

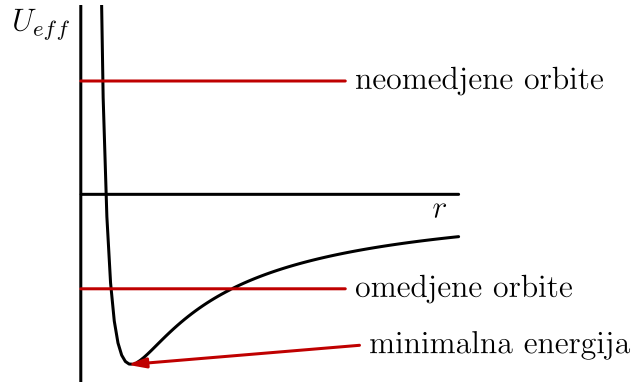
Efektivni potencijal ima minimum određen uvjetom

$$\left.\frac{dU_{eff}}{dr}\right|_{r=r_0} = 0 \Longrightarrow \frac{k}{r_0^2} - \frac{M^2}{\mu r_0^3} = 0 \Longrightarrow r_0 = \frac{M^2}{\mu k}, \tag{2.20}$$

Položaj minimuma ujedno definira prostornu skalu problema. Sa skice efektivnog potencijala možemo zaključiti da će orbite biti omeđene ako je energija čestice negativna, dok će u suprotnom slučaju ($E \geq 0$) biti neomeđene. Najmanja energija koju čestica mora imati da bi gibanje bilo moguće odgovara minimumu efektivnog potencijala

$$E_{min} = U_{eff}^{min} = -\frac{\mu k^2}{2M^2}. \tag{2.21}$$

Čestica se u tom slučaju giba po kružnici radijusa r_0. Povećamo li energiju, ali tako da i dalje vrijedi $E < 0$, čestica će se gibati između pericentra (r_{min}) i apocentra (r_{max}). U sustavu Sunce-Zemlje te dvije točke zovemo perihel i apohel. Približavanjem energije nuli, apocentar se sve više udaljava od centra sile, a kada se energija izjednači s nulom postaje beskonačno udaljen tj. orbita postaje neomeđena.



Slika 2.3: Efektivni potencijal u Keplerovom problemu je suma centrifugalnog potencijala $M^2/2\mu r^2$ i Keplerovog potencijala $-k/r$. Orbite su omeđene ako je energija negativna i neomeđene ako je energija veća od nule ili jednaka nuli.

2.3 Orbite u Keplerovom potencijalu: integracija jednadžbi gibanja

Uvrstimo Keplerov potencijal u izraz za orbitu

$$\phi = \int \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2\mu \left[E + \frac{k}{r}\right] - \frac{M^2}{r^2}}} + C \tag{2.22}$$

$$= \int \frac{M dr}{r\sqrt{2\mu E r^2 + 2\mu k r - M^2}} + C, \tag{2.23}$$

gdje je C konstanta integracije. Rješenje odgovarajućeg tabličnog integrala (Bronštejn, br. 258)

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} \tag{2.24}$$

ovisi o parametrima c i $\Delta = 4ac - b^2$. U našem slučaju vrijedi

$$a = 2\mu E, \quad b = 2\mu k, \quad c = -M^2. \tag{2.25}$$

Parametar Δ je negativan jer energija ne može biti manja od minimuma potencijala

$$\Delta = -8\mu E M^2 - 4\mu^2 k^2 = -8\mu M^2 \left(E + \frac{\mu k^2}{2M^2}\right) = -8\mu M^2 \left(E - E_{min}\right). \tag{2.26}$$

Za kombinaciju parametara $c < 0$ i $\Delta < 0$ vrijedi

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx + 2c}{x\sqrt{-\Delta}}. \tag{2.27}$$

Pomnožimo integral s momentom količine gibanja

$$\phi = \frac{M}{\sqrt{M^2}} \arcsin \frac{2\mu k r - 2M^2}{r\sqrt{8\mu M^2 \left(E + \frac{\mu k^2}{2M^2}\right)}} + C. \tag{2.28}$$

Definiramo dvije veličine koje karakteriziraju orbitu u Keplerovom potencijalu

- ekscentricitet orbite e

$$e = \sqrt{1 + \frac{2M^2 E}{\mu k^2}} = \sqrt{1 - \frac{E}{E_{min}}}, \tag{2.29}$$

- parametar orbite p

$$p = \frac{M^2}{\mu k}. \tag{2.30}$$

Orbita poprima oblik

$$\phi = \arcsin \frac{1 - \frac{p}{r}}{e} + C, \tag{2.31}$$

koji možemo invertirati

$$\frac{p}{r} = 1 - e \sin(\phi - C). \tag{2.32}$$

Ako izaberemo konstantu integracije $C \equiv \phi_0 + \pi/2$ dolazimo do standardnog oblika orbite u Keplerovom potencijalu

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + e\cos(\phi - \phi_0)}. \tag{2.33}$$

Orbita (2.33) predstavlja koničnu krivulju u polarnim koordinatama. Pericentar orbite se nalazi u točki

$$\phi = \phi_0, \quad r_{min} = \frac{p}{1+e}. \tag{2.34}$$

Koordinatni sustav možemo orjentirati tako da se pericentar nalazi na osi x. Takav izbor, ujedno i najčešći, odgovara konstanti $\phi_0 = 0$. Transformiramo li jednadžbu u Kartezijeve koordinate (dodatak A.3), ovisno o vrijednosti ekscentriciteta možemo prepoznati kružnicu ($e = 0$), elipsu ($0 < e < 1$), parabolu ($e = 1$) ili hiperbolu ($e > 1$)

$$\frac{(1-e^2)^2}{p^2}\left[x + \frac{pe}{1-e^2}\right]^2 + \frac{1-e^2}{p^2} y^2 = 1. \tag{2.35}$$

2.4 Omeđene orbite u Keplerovom potencijalu

2.4.1 Kružne orbite

Pretpostavimo da je energija čestice jednaka minimumu efektivnog potencijala

$$E = E_{min} = -\frac{\mu k^2}{2M^2} \Longleftrightarrow e = 0. \tag{2.36}$$

Orbita (2.33) svodi se na kružnicu radijusa p

$$r(\phi) = p = \frac{M^2}{\mu k}. \tag{2.37}$$

Brzinu čestice u kružnoj orbiti možemo izračunati koristeći ravnotežu centrifugalne i gravitacijske sile

$$\frac{\mu v_0^2}{p} = \frac{k}{p^2} \Longrightarrow v_0^2 = \frac{k}{\mu p}, \tag{2.38}$$

odakle slijedi i period gibanja čestice u kružnoj orbiti

$$T = \frac{2\pi p}{v_0} = 2\pi p^{3/2}\sqrt{\frac{\mu}{k}} = k\pi\sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}}. \tag{2.39}$$

Kinetička i potencijalna energija čestice

$$T = \frac{\mu}{2}v_0^2 = \frac{k}{2p} \quad \text{i} \quad U = -\frac{k}{p}, \tag{2.40}$$

vezane su relacijom $U = -2T$. Uz kružne orbite vežemo i pojam prve kozmičke brzine, odnosno brzine koju moramo dati satelitu da bi se gibao u kružnoj orbiti radijusa R_z oko Zemlje. U sustavu satelit-Zemlja reducirana masa je približno jednaka masi satelita ($\equiv m$)

$$\mu = \frac{m m_z}{m + m_z} = \frac{m}{1 + \frac{m}{m_z}} \approx m. \tag{2.41}$$

Prvu kozmičku brzinu možemo izračunati uvrštavanjem $\mu \approx m$ i $p = R_z$ u jedn. (2.38)

$$v_1^2 = \frac{k}{mR_z} = \frac{Gm_z}{R_z}. \tag{2.42}$$

Prva kozmička brzina ne ovisi o masi satelita, a njezina numerička vrijednost iznosi

$$v_1 = 7.9 \text{ km s}^{-1}. \tag{2.43}$$

2.4.2 Eliptične putanje

Ako se energija čestice nalazi u intervalu

$$-\frac{\mu k^2}{2M^2} < E < 0 \Longleftrightarrow 0 < e < 1, \tag{2.44}$$

orbita odgovara elipsi. Koordinatni sustav orjentiramo tako da se pericentar orbite nalazi na pozitivnoj ($\phi = 0$), dok se apocentar nalazi na negativnoj strani osi x ($\phi = \pi$), čime smo fiksirali konstantu $\phi_0 = 0$. Jednadžba orbite u tom slučaju glasi

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + e\cos\phi}. \tag{2.45}$$

Želimo povezati poluosi elipse s energijom i momentom količine gibanja čestice. Napišemo li jedn. (2.35) u malo preglednijem obliku

$$\frac{\left(x + \frac{pe}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1-e^2}} = 1, \tag{2.46}$$

možemo prepoznati jednadžbu elipse. Velika i mala poluos imaju duljine

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad \text{i} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}, \tag{2.47}$$

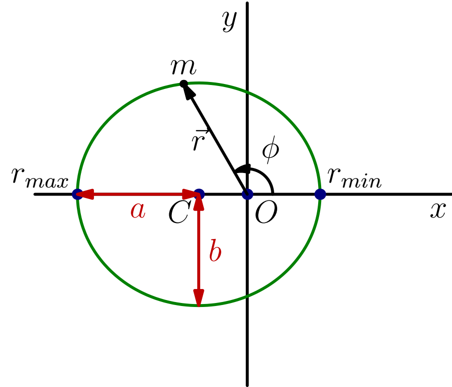
dok je centar elipse pomaknut od ishodišta za

$$-c = -\frac{pe}{1 - e^2} = -ea. \tag{2.48}$$

Fokus elipse nalazi se u ishodištu sustava. Uvrštavanjem parametara p i e možemo izvesti vezu poluosi elipse s energijom i momentom količine gibanja. Velika poluos ovisi samo o energiji, dok mala poluos ovisi i o energiji i o momentu količine gibanja

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\frac{M^2}{\mu k}}{-\frac{2EM^2}{\mu k^2}} = -\frac{k}{2E} = \frac{k}{2|E|}, \tag{2.49}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{\frac{M^2}{\mu k}}{\sqrt{-\frac{2EM^2}{\mu k^2}}} = \frac{M}{\sqrt{2\mu|E|}}. \tag{2.50}$$



Slika 2.4: Eliptična putanja u Keplerovom potencijalu.

Prvi Keplerov zakon

Prvi Keplerov zakon glasi: planeti se gibaju oko Sunca po elipsama u čijem je jednom fokusu Sunce. U stvarnosti se centar mase sustava Sunce-Zemlja nalazi u fokusu, a Sunce i Zemlja se gibaju po elipsama. Neka je m_s masa Sunca, a m_z masa Zemlje. Označimo s $\vec{r}_s$ radijus-vektor Sunca, $\vec{r}_z$ radijus-vektor Zemlje i $\vec{r}$ radijus-vektor reducirane mase sustava Zemlja-Sunce

$$\vec{r}_z = \frac{m_s}{m_s + m_z}\vec{r}\,, \quad \vec{r}_s = -\frac{m_z}{m_s + m_z}\vec{r}. \tag{2.51}$$

Masa Sunca je mnogo veća od mase Zemlje pa vrijedi

$$\vec{r}_z \approx \vec{r}\,, \quad \vec{r}_s \approx 0. \tag{2.52}$$

Stoga nam izgleda da Sunce miruje u fokusu, a Zemlja se giba oko njega. Orbita Zemlje približno je jednaka orbiti reducirane mase sustava Sunce-Zemlja.

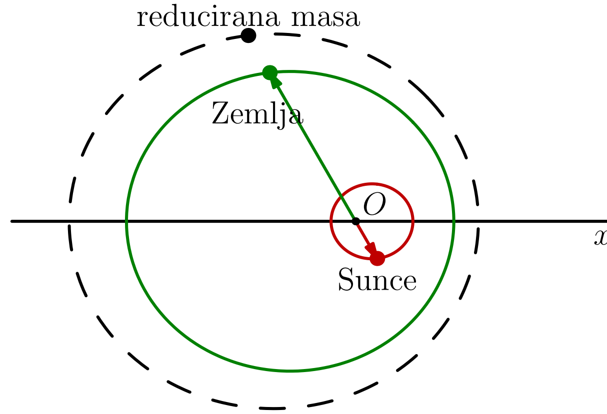
Treći Keplerov zakon

Treći Keplerov zakon glasi: kvadrat periode planeta je propocionalan kubu linearne dimenzije orbite. Period orbite možemo naći koristeći drugi Keplerov zakon. Plošna brzina je konstantna i proporcionalna momentu količine gibanja

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\phi \Longrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} \Longrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{M}{2\mu}. \tag{2.53}$$

Površina elipse jednaka je umnošku plošne brzine i perioda

$$P = ab\pi = \frac{dA}{dt}T \Longrightarrow T = \frac{ab\pi}{\frac{dA}{dt}}. \tag{2.54}$$



Slika 2.5: Putanje reducirane mase, Sunca i Zemlje. Omjer masa na slici je $m_s : m_z = 4 : 1$. U stvarnosti je omjer mnogo veći pa možemo reći da Sunce miruje u fokusu, a Zemlja se giba oko njega po elipsi.

Sada iskoristimo formulu (2.50) za malu poluos

$$T = a\pi \frac{M}{\sqrt{2\mu|E|}} \frac{2\mu}{M} = a\pi\sqrt{\frac{2\mu}{|E|}} = k\pi\sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}}. \tag{2.55}$$

Isto tako, energiju možemo izraziti pomoću velike poluosi

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{\mu}{k}} \Longrightarrow T^2 = \left(4\pi^2\frac{\mu}{k}\right) a^3. \tag{2.56}$$

Masa Sunca je mnogo veća od mase planeta ($\equiv m_p$) pa je reducirana masa približno jednaka masi planeta

$$\mu = \frac{m_s m_p}{m_s + m_p} = \frac{m_p}{1 + \frac{m_p}{m_s}} \approx m_p. \tag{2.57}$$

Omjer μ/k u izrazu (2.56) jednak je za sve planete

$$\frac{\mu}{k} \approx \frac{m_p}{G m_s m_p} = \frac{1}{G m_s}. \tag{2.58}$$

Koristeći zaključke Keplera i Galilea

- Kepler: omjer T^2/a^3 jednak je za sve planete u Sunčevom sustavu
- Galilei: putanja tijela kod slobodnog pada ili hica na Zemlji ne ovisi o masi tijela

i promatrajući putanju Mjeseca oko Zemlje Newton je zaključio da gravitacioni potencijal ima oblik

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \tag{2.59}$$

Pritom univerzalna konstanta gravitacije ima vrijednost

$$G = 6.672 \cdot 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}. \tag{2.60}$$

Newtonov zakon gravitacije

Kako je Newton usporedio astronomska i opažanja Galilei-a? Mjesec se giba po približno kružnoj putanju polumjera

$$R_M \approx 386000\ km = 3.86 \cdot 10^8\ m. \tag{2.61}$$

Period gibanja Mjeseca iznosi 27 dana 7 sati i 43 minute

$$T_M \approx 27.32 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ s = 23.6 \cdot 10^5\ s, \tag{2.62}$$

a možemo ga napisati u obliku

$$T_M^2 = 4\pi^2 \frac{\mu}{k} R_M^3 = 4\pi^2 \frac{M_M M_Z}{M_M + M_Z} \frac{R_M^3}{G M_Z M_M} R_M^3 \tag{2.63}$$

$$T_M^2 = \frac{4\pi^2}{G M_Z \left(1 + \frac{M_M}{M_Z}\right)} R_M^3. \tag{2.64}$$

Konstanta sile teže

$$g = \frac{G M_Z}{R_Z^2}. \tag{2.65}$$

Eliminacija GM_Z daje

$$g = \frac{4\pi^2 R_M^3}{T_M^2 R_Z^2 \left(1 + \frac{M_M}{M_Z}\right)}. \tag{2.66}$$

Polumjer Zemlje iznosi 6370 km

$$g = \frac{10.05\ ms^{-2}}{\left(1 + \frac{M_M}{M_Z}\right)}. \tag{2.67}$$

Korekcija od mase Mjeseca je mala

$$1 + \frac{M_M}{M_Z} \approx \frac{1}{81}, \tag{2.68}$$

a ako je uzmemo u obzir dobijemo konstantu sile teže

$$g \approx 9.92\ ms^{-2}. \tag{2.69}$$

Degenerirana elipsa

Pretpostavimo da se čestica giba u kružnoj orbiti radijusa R_0. Brzinu čestice možemo izračunati iz uvjeta jednakosti centrifugalne i gravitacijske sile

$$\frac{\mu v_0^2}{R_0} = \frac{k}{R_0^2} \Longrightarrow v_0^2 = \frac{k}{\mu R_0}. \tag{2.70}$$

Energija čestice je suma kinetičke i potencijalne energije

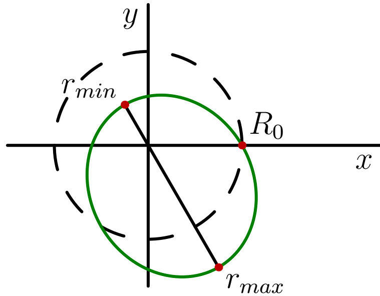
$$E = \frac{\mu}{2} v_0^2 - \frac{k}{R_0} = -\frac{k}{2R_0}. \tag{2.71}$$

Brzina je u svakom trenu okomita na radijus-vektor čestice

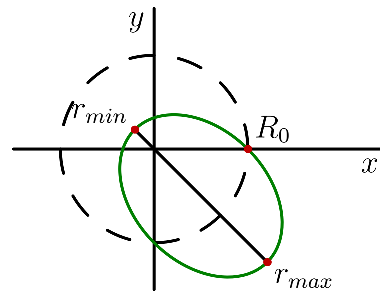
$$|\vec{M}| = \mu v_0 R_0 = \sqrt{\mu k R_0}. \tag{2.72}$$

Promatramo niz drugih čestica, od kojih svaka ima jednaku energiju kao i čestica u kružnoj orbiti, ali različit iznos momenta količine gibanja. Neka brzina svih čestica u točki $(\phi = 0, r = R_0)$ ima jednak iznos v_0, ali različit kut prema osi x. Moment količine gibanja čestice koja zatvara kut α s osi x iznosi

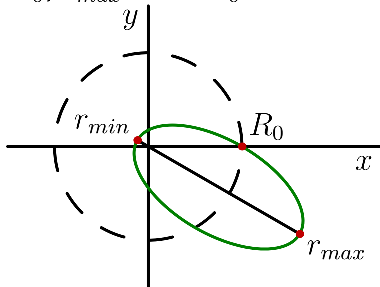
$$|\vec{M}| = \mu v_0 R_0 \sin\alpha = \sqrt{\mu k R_0} \sin\alpha. \tag{2.73}$$



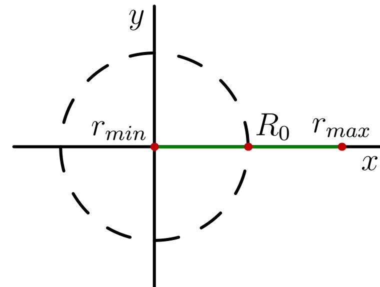
Slika 2.6: $\alpha = 120^0$, $r_{min} = 0.5R_0$, $r_{max} = 1.5R_0$.



Slika 2.7: $\alpha = 135^0$, $r_{min} = 0.293R_0$, $r_{max} = 1.707R_0$.



Slika 2.8: $\alpha = 150^0$, $r_{min} = 0.134R_0$, $r_{max} = 1.866R_0$.



Slika 2.9: $\alpha = 180^0$, $r_{min} = 0$, $r_{max} = 2R_0$.

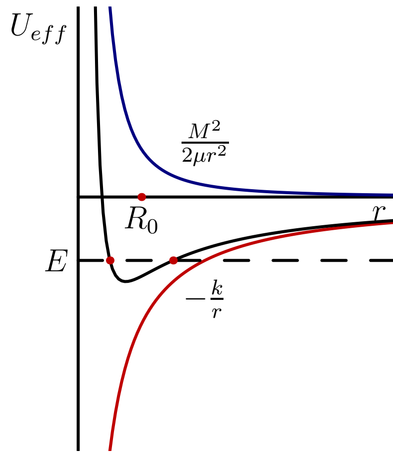
Perihel svih takvih orbita se više ne nalazi na osi x pa ih opisujemo jednadžbom

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + e\cos(\phi - \phi_0)}. \tag{2.74}$$

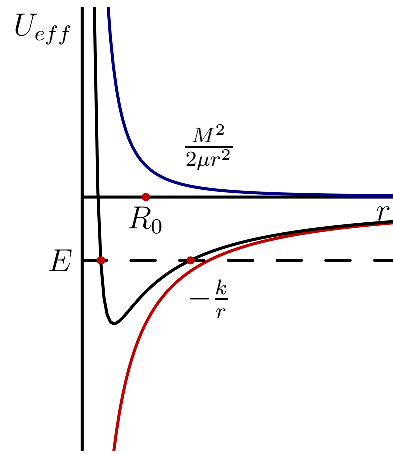
Parametar i ekscentricitet pojedinih orbita ovise o kutu α

$$p = \frac{M^2}{\mu k} = R_0 \sin^2\alpha, \tag{2.75}$$

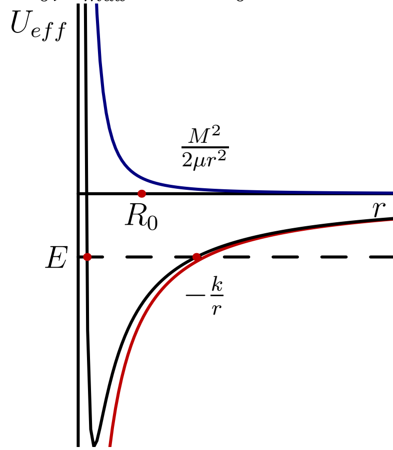
$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\mu k^2}} = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}. \tag{2.76}$$



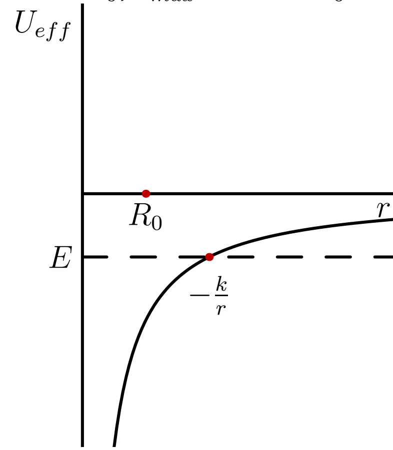
Slika 2.10: $\alpha = 120^0$, $r_{min} = 0.5R_0$, $r_{max} = 1.5R_0$.



Slika 2.11: $\alpha = 135^0$, $r_{min} = 0.293R_0$, $r_{max} = 1.707R_0$.



Slika 2.12: $\alpha = 150^0$, $r_{min} = 0.134R_0$, $r_{max} = 1.866R_0$.



Slika 2.13: $\alpha = 180^0$, $r_{min} = 0$, $r_{max} = 2R_0$.

Kut ϕ_0 možemo izračunati iz uvjeta

$$r(\phi = 0) = R_0 \Longrightarrow 1 + e\cos\phi_0 = \frac{p}{R_0} \Longrightarrow \cos\phi_0 = \frac{1}{e}\left[\sin^2\alpha - 1\right] \tag{2.77}$$

Nekoliko primjera ovakvih orbita nalazi se na sl. 2.6-2.9. Uočimo da sve čestice imaju jednaku energiju, a time i sve orbite imaju jednake velike poluosi. Smanjivanjem momenta količine gibanja, smanjujemo malu poluos elipsa pa one postaju sve tanje. Krajnji slučaj je na sl. 2.9. Moment impulsa čestice je nula, centrifugalna barijera više ne postoji i čestica može proći kroz centar sile ($r_{min} = 0$). Orbita se svela na pravac (degenerirana elipsa), iako formalno $e \to 1$. Uvrstimo moment količine gibanja (2.73) u efektivni potencijal

$$U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} = \frac{k}{2R_0}\left(\sin^2\alpha\frac{R_0^2}{r^2} - 2\frac{R_0}{r}\right). \tag{2.78}$$

Sa smanjivanjem momenta količine gibanja, smanjujemo i centrifugalnu barijeru. U krajnjem slučaju ($M \to 0$) centrifugalna barijera nestaje i čestica može proći kroz centar sile. Efektivni potencijalu koji odgovaraju orbitama sa sl. 2.6-2.9 prikazani su na sl. 2.10-2.13.

Horizontalni hitac na površini Zemlje kao aproksimacija Keplerove putanje

Pretpostavimo da je kamen mase m izbačen horizontalno s tornja visine h iznad površine Zemlje. Početnu brzinu označimo s v_0. Zemlja djeluje na kamen kao da joj je cijela masa skoncentrirana u središtu pa se kamen giba po elipsi u čijem je fokusu središte Zemlje. Definiramo dva koordinatna sustava:

- sustav xz s ishodištem u točki iz koje bacamo kamen,
- sustav $x'z'$ s ishodištem u središtu Zemlje.

Veza između ta dva sustava glasi

$$y' = y \tag{2.79}$$

$$z' = z + \overline{OV} = z + \overline{OU} + \overline{UV} = z + R_z + h. \tag{2.80}$$

Napišemo jednadžbu elipse čiji je centar pomaknut od ishodišta za $c = \overline{OC}$

$$\frac{(z'-c)^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1. \tag{2.81}$$

Sa sl. 2.14 možemo zaključiti da je duljina velike poluosi dana relacijom

$$a = \overline{OV} - \overline{OC} = R_z + h - c. \tag{2.82}$$

Prelazimo u koordinatni sustav xz

$$z' = z + R_z + h \Longrightarrow z' - c = z + R_z + h - c = z + a. \tag{2.83}$$

Jednadžba elipse u sustavu xz glasi

$$\frac{(z+a)^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{2.84}$$

Kvadriramo prvi član

$$\frac{(z+a)^2}{a^2} = \frac{z^2}{a^2} + 2\frac{z}{a} + 1, \tag{2.85}$$

i prisjetimo se da kamen bacimo blizu površine Zemlje. U tom slučaju kvadratični član možemo zanemariti i jednadžba (2.84) se svodi na

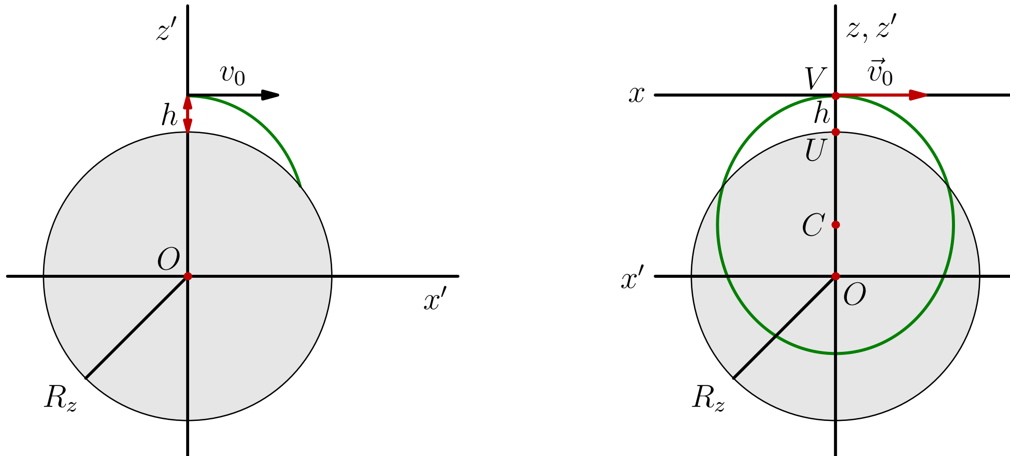
$$z = -\frac{a}{2b^2}x^2. \tag{2.86}$$

Poluosi elipse izrazimo pomoću energije i momenta količine gibanja

$$a = \frac{k}{2|E|} \quad \text{i} \quad b = \frac{M}{\sqrt{2\mu|E|}}, \tag{2.87}$$

gdje je μ reducirana masa sistema Zemlja-kamen. Kamen je mnogo lakši od Zemlje pa vrijedi

$$m \ll M_z \Longrightarrow \mu = \frac{mM_z}{M_z + m} = \frac{m}{1 + m/M_z} \approx m. \tag{2.88}$$



Slika 2.14: Čestica je ispaljena horizontalno na visini h iznad površine Zemlje.

Osim toga, kamen je ispaljen horizontalno i njegov moment količine gibanja iznosi

$$M = m(R_z + h)v_0 \approx mR_z v_0. \tag{2.89}$$

Prisjetimo se značenja konstante k u Keplerovom potencijalu

$$k = GmM_z. \tag{2.90}$$

Prvo uvrstimo malu i veliku poluos u izraz za putanju

$$z = -\frac{a}{2b^2}x^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{2|E|} \cdot \frac{2m|E|}{M^2}x^2, \tag{2.91}$$

a zatim još uvrstimo konstatnu k i moment količine gibanja M

$$z = -\frac{km}{2M^2}x^2 = -\frac{GM_z m^2}{2m^2 R_z^2 v_0^2}x^2 = -\frac{GM_z}{2R_z^2}\frac{x^2}{v_0^2}. \tag{2.92}$$

Na kraju iskoristimo definiciju konstante sile teže i dolazimo do poznatog rezultata

$$g \equiv \frac{GM_z}{R_z^2} \Longrightarrow z = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2}. \tag{2.93}$$

Slobodni pad na površini Zemlje kao aproksimacija Keplerove putanje

Pretpostavimo da je kamen mase m ispušten (početna brzina je nula) s visine h iznad površine Zemlje, kao na sl. 2.15. Pritom je u stvarnosti visina h mnogo manja od radijusa Zemlje ($h \ll R_z$). Budući da čestica u početnom trenutku miruje njezin moment količine gibanja iščezava, a energija joj je jednaka početnoj potencijalnoj energiji

$$E = -\frac{k}{R_0}, \tag{2.94}$$

gdje je $R_0 = R_z + h$. Zakon sačuvanja energije daje

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 - \frac{k}{r} = -\frac{k}{R_0}, \tag{2.95}$$

odakle možemo izraziti radijalnu brzinu čestice

$$\dot{r}^2 = \frac{2k}{\mu}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right). \tag{2.96}$$

Čestica se giba između početne točke $r = R_0$ i površine Zemlje $r = R_z$. Tijekom gibanja se potencijalna energija čestice smanjuje, dok kinetička raste s nule na

neku konačnu vrijednost. Ograničimo se sada na slobodni pad blizu površine Zemlje

$$R_0 - R_z \equiv h \quad \mathsf{r} - R_z \equiv z, \tag{2.97}$$

pri čemu vrijedi $h, z \ll R_z$. Iskoristimo Taylorov razvoj

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_z + z} = \frac{1}{R_z}\frac{1}{1 + \frac{z}{R_z}} \approx \frac{1}{R_z}\left(1 - \frac{z}{R_z}\right), \tag{2.98}$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_z + h} = \frac{1}{R_z}\frac{1}{1 + \frac{h}{R_z}} \approx \frac{1}{R_z}\left(1 - \frac{h}{R_z}\right). \tag{2.99}$$

Brzina se svodi na

$$\dot{z}^2 = \frac{2k}{\mu R_z}\left(1 - \frac{z}{R_z} - 1 + \frac{h}{R_z}\right) = \frac{2k}{\mu R_z^2}\left(h - z\right). \tag{2.100}$$

Čestica je mnogo lakša od Zemlje pa vrijedi

$$\mu = \frac{mM_z}{m + M_z} = \frac{m}{1 + m/M_z} \approx m. \tag{2.101}$$

Biramo negativan predznak jer se udaljenost čestice od površine Zemlje smanjuje

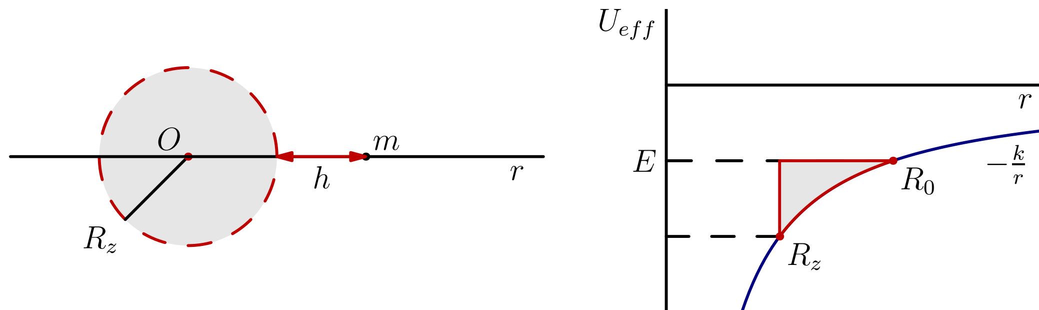
$$\dot{z} = -\sqrt{\frac{2k}{mR_z^2}}\sqrt{h - z} = -\sqrt{\frac{2GM_z}{R_z^2}}\sqrt{h - z}. \tag{2.102}$$

Prisjetimo se definicije konstante sile teže

$$g \equiv \frac{GM_z}{R_z^2} \Longrightarrow \dot{z} = -\sqrt{2g}\sqrt{h - z}. \tag{2.103}$$

Separiramo varijable u prethodnoj jednadžbi

$$\frac{dz}{\sqrt{h - z}} = -\sqrt{2g}dt \Longrightarrow \int_h^z \frac{dz'}{\sqrt{h - z'}} = -\sqrt{2g}t, \tag{2.104}$$



Slika 2.15: Čestica je ispuštena s visine h iznad površine Zemlje.

a zatim integriramo lijevu i desnu stranu. Integral desne strane je trivijalan, dok je integral lijeve strane nešto složeniji

$$I = \int_h^z \frac{dz'}{\sqrt{h - z'}} = -\int_h^z \frac{d(h - z')}{\sqrt{h - z'}}. \tag{2.105}$$

Napravimo supstituciju $u = h - z'$

$$I = -\int_0^{h-z} \frac{du}{\sqrt{u}} = -\left.\frac{\sqrt{u}}{1/2}\right|_0^{h-z} = -2\sqrt{h - z}, \tag{2.106}$$

$$\Longrightarrow -2\sqrt{h - z} = -\sqrt{2g}t \Longrightarrow h - z = \frac{g}{2}t^2, \tag{2.107}$$

i na kraju stižemo do poznatog izraza za slobodni pad s visine h

$$z = h - \frac{g}{2}t^2. \tag{2.108}$$

Primjer 2.2

Asteroid mase m opažen je na udaljenosti $16R_z$ od centra Zemlje kako se giba brzinom $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{GM_z}{R_z}}$. Smjer brzine otklonjen je za kut $\theta = \arccos\frac{11}{12}$ od smjera gibanja prema Zemlji. Nađite jednadžbu orbite po kojoj se asteroid giba, te udaljenost za koju će promašiti Zemljinu površinu.

Asteroid se giba u gravitacijskom polju Zemlje. Pretpostavljamo da utjecaj Sunca i drugih planeta možemo zanemariti, kao i da je masa asteroida mnogo manja od mase Zemlje. U tom slučaju se asteroid giba po koničnoj krivulji u čijem fokusu Zemlja (centar sile) miruje. Jednadžba orbite glasi

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\phi - \phi_0)}. \tag{2.109}$$

Ekscentricitet i paramtar orbite određeni su energijom i momentom količine gibanja asteroida, dok kut ϕ_0 možemo izračunati iz početnog uvjeta

$$r(\phi = 0) = r_0 = 16R_z. \tag{2.110}$$

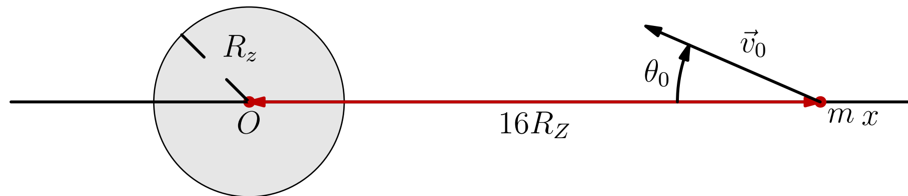
Energija asteroida je suma početne kinetičke i potencijalne energije

$$E = \frac{m}{2}v_0^2 - G\frac{mM_z}{r_0} = \frac{m}{2}\frac{GM_z}{16R_z} - \frac{GmM_z}{16R_z} = -\frac{GmM_z}{32R_z}. \tag{2.111}$$

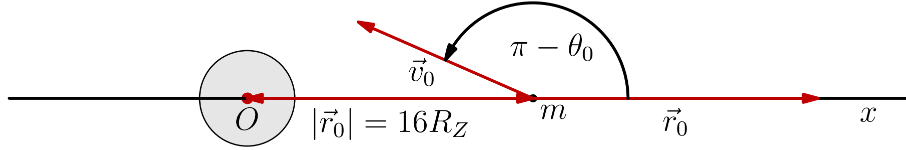
Energija je negativna pa možemo zaključiti da se asteroid giba po elipsi. Moment količine gibanja asteroida također možemo izračunati u početnom trenutku

$$M = m\left|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0\right| = mr_0v_0\sin(\pi - \theta) = mr_0v_0\sin\theta = \frac{\sqrt{23}}{3}m\sqrt{GM_zR_z}. \tag{2.112}$$

Sada možemo izračunati parametar orbite



Slika 2.16: Asteroid se u početnom trenutku nalazi na udaljenosti $16R_z$ od centra Zemlje. Početna brzina $\vec{v}_0$ je otklonjena za kut θ_0 od pravca gibanja.



Slika 2.17: Vektori početnog položaja $\vec{r}_0$ i početne brzine $\vec{v}_0$ potrebni za izračunavanje momenta količine gibanja.

$$p = \frac{M^2}{mk} = \frac{M^2}{m^2 G M_z} = \frac{23}{9} R_z, \tag{2.113}$$

kao i ekscentricitet orbite

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{mk^2}} = \frac{11}{12}. \tag{2.114}$$

Preostalo nam je još izračunati kut ϕ_0

$$r(\phi = 0) = r_0 = 16R_z \Longrightarrow \frac{p}{1 + e\cos\phi_0} = 16R_z. \tag{2.115}$$

Uvrstimo parametar i ekscentricitet orbite

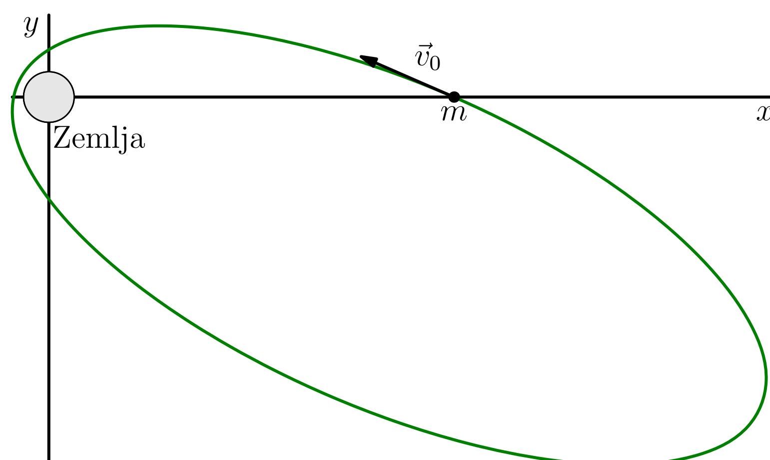
$$\phi_0 = \arccos\left(-\frac{11}{12}\right). \tag{2.116}$$

Asteroid se nalazi na minimalnoj udaljenosti od centra Zemlje za kut $\phi = \phi_0$

$$r_{min} = r(\phi = \phi_0) = \frac{4}{3} R_z. \tag{2.117}$$

Minimalnu udaljenost od površine Zemlje dobijemo tako da od r_{min} oduzmemo radijus Zemlje

$$d_{min} = r_{min} - R_z = \frac{1}{3} R_z. \tag{2.118}$$



Slika 2.18: Orbita asteroida.

Primjer 2.3

Kada bi se Zemlja naglo zaustavila u svojoj orbiti, za koliko dana bi udarila u Sunce? Orbitu Zemlje prije zaustavljanja aproksimirajte kružnicom.

Nakon zaustavljanja, Zemlja se počinje približavati Suncu. Pretpostavljamo da je masa Zemlje zanemariva u odnosu na masu Sunca pa Sunce možemo smatrati fiksnim centrom gravitacijske sile. Zemlja kreće iz mirovanja pa je njezin moment količine gibanja nula. Centrifugalna barijera iščezava i Zemlja može pasi u centar sile (tj. može udariti u Sunce). Energija Zemlje jednaka je početnoj potencijalnoj energiji jer je početna kinetička energija nula

$$E = -\frac{k}{R_0}. \tag{2.119}$$

Zakon sačuvanja energije daje

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{k}{r} = E = -\frac{k}{R_0}. \tag{2.120}$$

Izrazimo radijalnu brzinu Zemlje

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2k}{m}}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}}. \tag{2.121}$$

Pritom smo odabrali negativan predznak jer se udaljenosti Zemlje od Sunca smanjuje. Separiramo varijable u jedn. (2.121) pa zatim integriramo lijevu i desnu stranu

$$T = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_0^{R_0} \frac{r dr}{\sqrt{-\frac{r^2}{R_0} + r}}. \tag{2.122}$$

Vrijednost tabličnog integrala (Bronštejn, br. 249)

$$I_{br} = \int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \tag{2.123}$$

ovisi o parametrima a i $\Delta = 4ac - b^2$. U našem slučaju vrijedi

$$a = -\frac{1}{R_0}, \quad b = 1, \quad c = 0 \Longrightarrow \Delta = -1. \tag{2.124}$$

Rješenje integrala za kombinaciju parametara

$$a < 0 \quad \text{i} \quad \Delta < 0 \tag{2.125}$$

glasi

$$I_{br} = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2|a|^{3/2}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}. \tag{2.126}$$

Uvrstimo parametre (2.124)

$$I = -R_0 \sqrt{-\frac{r^2}{R_0} + r}\Bigg|_0^{R_0} - \frac{R_0^{3/2}}{2} \arcsin \frac{-2r + R_0}{R_0}\Bigg|_0^{R_0}, \tag{2.127}$$

kao i granice integracije

$$I = \frac{\pi R_0^{3/2}}{2}. \tag{2.128}$$

Vrijeme potrebno da Zemlja udari u Sunce

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} \frac{R_0^{3/2}}{4\sqrt{2}}. \tag{2.129}$$

Kombinaciju parametara

$$\sqrt{\frac{\mu}{k}} R_0^{3/2}, \tag{2.130}$$

možemo izraziti pomoću perioda gibanja Zemlje oko Sunca prije zaustavljanja. Ako orbitu prije zaustavljanja aproksimiramo kružnicom, možemo izjednačiti centrifugalnu i gravitacijsku silu

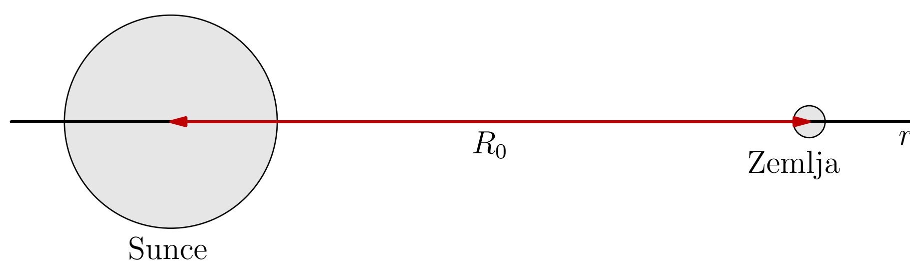
$$\frac{mv^2}{R_0} = \frac{k}{R_0^2} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{k}{mR_0}}. \tag{2.131}$$

Vrijeme potrebno da Zemlja obiđe Sunce

$$\tau = \frac{2\pi R_0}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} R_0^{3/2}. \tag{2.132}$$

Zemlja bi udarila u Sunce za

$$T = \frac{\tau}{4\sqrt{2}} \approx 65 \text{ dana}. \tag{2.133}$$



Slika 2.19: Zemlja i Sunce u trenutku zaustavljanja Zemlje.

2.5 Neomeđene orbite u Keplerovom potencijalu

2.5.1 Parabolične putanje

Pretpostavimo da povećavamo energiju čestice, dok moment količine gibanja držimo konstantnim. Velika poluos elipse raste i u graničnom slučaju $E \to 0$ teži u beskonačnost

$$a = \frac{k}{2|E|}. \tag{2.134}$$

Elipsa tada prelazi u parabolu. $E = 0$ je minimalna vrijednost energije potrebna čestici da bi se neograničeno udaljila od centra polja. Orbita u tom slučaju glasi

$$r = \frac{p}{1 + \cos\phi}. \tag{2.135}$$

Pericentar se nalazi u točki $(p/2, 0)$, dok apocentar više ne postoji jer orbita divergira kada $\phi \to \pi$. Uz ovaj tip gibanja vezan je i pojam druge kozmičke brzine, odnosno najmanje brzine koju moramo dati raketi na površini Zemlje da bi ista mogla zauvijek napustiti Zemlju. Označimo s m i m_z mase rakete i Zemlje. Za sustav raketa-Zemlja sigurno vrijedi

$$m \ll m_z \Longrightarrow \mu \approx m. \tag{2.136}$$

Da bi napustila Zemlju, energija rakete mora biti nula

$$E = \frac{m}{2}\vec{v}_2^2 - \frac{k}{r} = 0\,, \quad k = Gmm_z. \tag{2.137}$$

Tijelo ispaljujemo s površine Zemlje pa je $r = R_z$

$$\Longrightarrow \vec{v}_2^2 = \frac{2k}{mR_z} = \frac{2Gm_z}{R_z}. \tag{2.138}$$

Brzina v_2 ne ovisi o masi tijela, a njezina numerička vrijednost iznosi

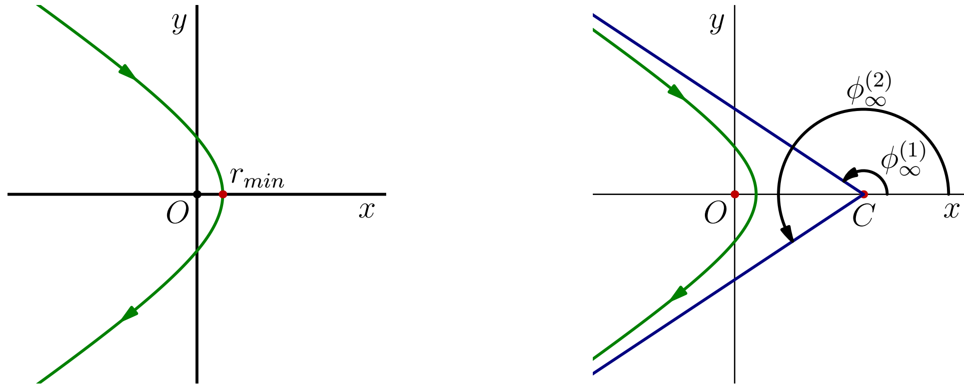
$$v_2 \approx 11.2 \text{ km s}^{-1}. \tag{2.139}$$

2.5.2 Hiperbolične putanje

Karakteristike hiperbolične orbite

Čestica se nalazi na minimalnoj udaljenosti od centra polja za kut $\phi = 0$ jer nazivnik orbite tada ima maksimalnu vrijednost

$$r_{min} = \frac{p}{1 + e}. \tag{2.140}$$



Slika 2.20: Lijevo: čestica koja se giba u polju privlačne gravitacijske sile pri prolasku kroz pericentar zaobilazi centar sile smješten u ishodištu. Desno: asimptote hiperbole sijeku se u centru hiperbole i zatvaraju kuteve $\phi_\infty^{(1)}$ i $\phi_\infty^{(2)}$ s osi x.

Karakteristika neomeđenih orbita u privlačnom gravitacijskom potencijalu jer da čestica pri prolasku kroz pericentar "zaobilazi" centar sile. Centar hiperbole pomaknut je od ishodišta za

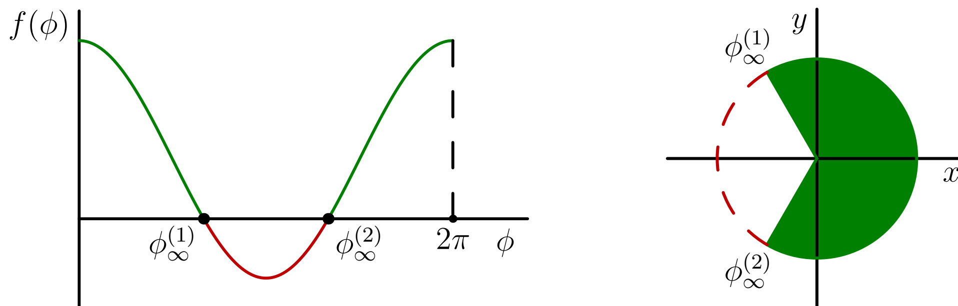
$$c = \frac{pe}{e^2 - 1}. \tag{2.141}$$

Asimptote hiperbole prolaze kroz centar hiperbole i zatvaraju kuteve $\phi_\infty^{(1)}$ i $\phi_\infty^{(2)}$ s osi x.

Područje dostupno čestici

Ako je energija čestice koja se giba u Keplerovom potencijalu pozitivna, ekscentricitet putanje postaje veći od 1

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\mu k^2}} > 1, \tag{2.142}$$



Slika 2.21: Određivanje intervala kuteva dostupnih čestici.

pa nazivnik putanje čestice $f(\phi) \equiv 1 + e\cos\phi$ može pasti na nulu ili poprimiti negativne vrijednosti. Budući da je udaljenost čestice od centra sile po definiciji pozitivna, putanja čestice je definirana samo za one kuteve, za koje vrijedi

$$f(\phi) = 1 + e\cos\phi > 0 \Longrightarrow \cos\phi > -\frac{1}{e}. \tag{2.143}$$

Bitno je uočiti da putanja divergira u nul-točkama nazivnika

$$1 + e\cos\phi_\infty = 0 \Longrightarrow \phi_\infty = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right), \tag{2.144}$$

što zapravo znači da se čestica beskonačno udaljava od centra polja. Funkcija kosinus je negativna u drugom i trećem kvadrantu pa jedn. 2.144 ima dva rješenja

$$\phi_\infty^{(1)} = \pi - \arccos(1/e) \quad \text{i} \quad \phi_\infty^{(2)} = \pi + \arccos(1/e). \tag{2.145}$$

Sa sl. 2.21 možemo pročitati kuteve dostupne čestici. Radi se o uniji dva intervala na kojima je nazivnik orbite pozitivan

$$\left[0, \phi_\infty^{(1)}\right\rangle \bigcup \left\langle\phi_\infty^{(2)}, 2\pi\right]. \tag{2.146}$$

Pojam ulaznog parametra

Jedan od važnijih pojmova koji ćemo susresti kod problema raspršenja je ulazni parametar orbite. Definiramo ga kao najmanju udaljenost od centra polja koju bi čestica imala kada bi se iz beskonačnosti nastavila gibati po pravcu, odnosno kada ne bi osjećala utjecaj polja. Takva putanja čestice odgovara asimptoti prave putanja pa iz pravokutnog trokuta na sl. 2.22 slijedi

$$h = |\overline{OC}|\sin(\pi - \phi_\infty) = |\overline{OC}|\sin\phi_\infty. \tag{2.147}$$

Uvrstimo udaljenost centra hiperbole od ishodišta (2.141)

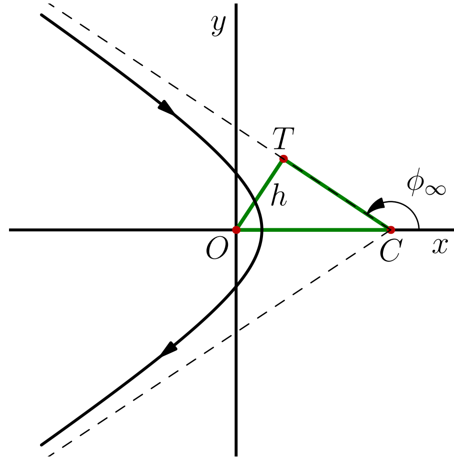
$$h = \frac{pe}{e^2-1}\sin\phi_\infty = \frac{pe}{e^2-1}\sqrt{1-\cos^2\phi_\infty}, \tag{2.148}$$

a zatim iskoristimo uvjet (2.144)

$$h = \frac{pe}{e^2-1}\sqrt{1-\frac{1}{e^2}} = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}. \tag{2.149}$$

Konačno, ako parametar p i ekscentricitet e izrazimo pomoću energije i momenta količine gibanja

$$h = \frac{M}{\sqrt{2E\mu}}. \tag{2.150}$$

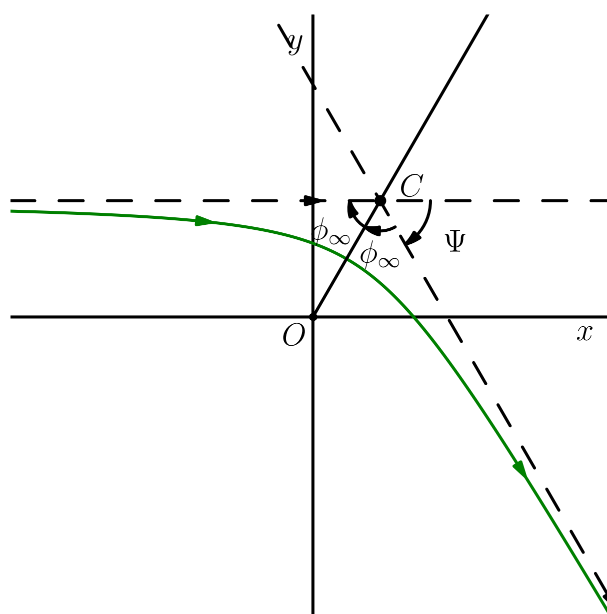


Slika 2.22: Ulazni parametar h čestice odgovara udaljenosti za koju bi čestica promašila centar polja kad bi se gibala po asimptoti, a ne pravoj putanji.

Početni uvjeti nisu uvijek takvi da je pericentar orbite na osi x. U tom slučaju koristimo općenitiju formu orbite

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + e\cos(\phi - \phi_0)}. \tag{2.151}$$

Rezultat je rotirana orbita za kut ϕ_0 u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Pericentar se u ovom slučaju nalazi na pravcu koji zatvara kut ϕ_0 s osi x. Kao primjer, zarotirajmo putanju tako da čestica stiže paralelno s osi x. Kut rotacije iznosi $\phi_0 = \pi - \phi_\infty^{(1)}$, čestica dolazi iz beskonačnosti paralelno s osi x, a kut između ulaznog i izlaznog smjera gibanja iznosi $\Psi = \pi - 2\phi_\infty$. Početna udaljenost čestice od osi x odgovara ulaznom parametru orbite.



Slika 2.23: Rotirana hiperbola. Čestica dolazi iz beskonačnosti paralelno s osi x. Kut između ulaznog i izlaznog smjera gibanja iznosi $\Psi = \pi - 2\phi_\infty$.

Primjer 2.4

Komet mase m giba se pod utjecajem Sunca po paraboličnoj putanji. Izračunajte maksimalno vrijeme koje komet može provesti unutar Zemljine orbite. Pretpostavite da se Zemlja giba po kružnici radijusa R_z koja se nalazi u istoj ravnini kao i putanja kometa.

Komet se giba po paraboli pa njegova energija mora biti jednaka nuli

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{k}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} = E = 0, \tag{2.152}$$

gdje je $k = GM_s m$. Izrazimo radijalnu brzinu kometa

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{k}{r} - \frac{M^2}{2mr^2}\right)}. \tag{2.153}$$

Separiramo varijable u prethodnoj jednadžbi

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{k}{r} - \frac{M^2}{2mr^2}\right)}} = dt. \tag{2.154}$$

Orbita kometa unutar orbite Zemlje je simetrična s obzirom na perihel pa je ukupno vrijeme koje komet provede unutar orbite Zemlje

$$T = 2\int_{r_{min}}^{R_z} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{k}{r} - \frac{M^2}{2mr^2}\right)}} = 2\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_{r_{min}}^{R_z} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{M^2}{2mkr^2}}}. \tag{2.155}$$

Možemo povezati moment količine gibanja i perihel

$$-\frac{k}{r_{min}} + \frac{M^2}{2mr_{min}^2} = 0 \Longrightarrow M^2 = 2mkr_{min}. \tag{2.156}$$

Vrijeme koje komet provede unutar orbite

$$T = \sqrt{\frac{2m}{k}}\int_{r_{min}}^{R_z} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{r_{min}}{r^2}}}. \tag{2.157}$$

Pomnožimo brojnik i nazivnik s r

$$T = \sqrt{\frac{2m}{k}}\int_{r_{min}}^{R_z} \frac{rdr}{\sqrt{r - r_{min}}}. \tag{2.158}$$

Rješenje integrala možemo pronaći u tablicama integrala (Bronštejn, integral br. 125 uz parametre $a = 1$, $b = -r_{min}$)

$$T = \sqrt{\frac{2m}{k}} \frac{2(r + 2r_{min})}{3} \sqrt{r - r_{min}} \Big|_{r_{min}}^{R_z} \tag{2.159}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2m}{k}} \left[(R_z + 2r_{min}) \sqrt{R_z - r_{min}} \right]. \tag{2.160}$$

Primjetimo da se u rezultatu javlja samo omjer

$$\frac{k}{m} = GM_s, \tag{2.161}$$

koji ne ovisi o svojstvima kometa, nego samo Sunca. Rezultat možemo izraziti u godinama ako uočimo da je period gibanja Zemlje oko Sunca

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R_z^3}{GM_s}} \Longrightarrow \sqrt{GM_s} = \frac{2\pi}{\tau} R_z^{3/2}. \tag{2.162}$$

Uvrstimo prethodni rezultat u jedn. (2.160)

$$T = \frac{\sqrt{2}}{3\pi} \tau R_z^{-3/2} \left[(R_z + 2r_{min}) \sqrt{R_z - r_{min}} \right] \tag{2.163}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3\pi} \tau \left[(1 + 2\frac{r_{min}}{R_z}) \sqrt{1 - \frac{r_{min}}{R_z}} \right]. \tag{2.164}$$

Rezultat ovisi o omjeru perihela i radijusa Zemljine orbite

$$\xi \equiv \frac{r_{min}}{R_z}. \tag{2.165}$$

Vrijeme koje komet provede unutar Zemljine orbite možemo napisati u obliku

$$T = \frac{\sqrt{2}}{3\pi} \tau (1 + 2\xi) \sqrt{1 - \xi}. \tag{2.166}$$

Funkcija

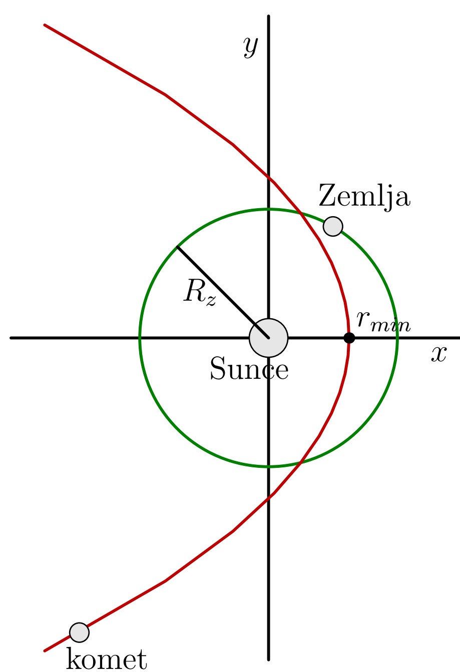
$$f(\xi) = (1 + 2\xi) \sqrt{1 - \xi} \tag{2.167}$$

ima maksimum ako njena derivacija iščezava

$$f'(\xi) = 2\sqrt{1 - \xi} - \frac{1}{2\sqrt{1 - \xi}} (1 + 2\xi) = 0 \Longrightarrow \xi = \frac{1}{2}. \tag{2.168}$$

Maksimalno vrijeme koje komet može provesti unutar Zemljine orbite

$$T_{max} = \frac{2}{3\pi} \tau. \tag{2.169}$$



Slika 2.24: Sustav komet, Zemlja i Sunce.

Primjer 2.5

Komet se giba pod utjecajem gravitacijskog polja Sunca po orbiti

$$r(\phi) = \frac{2}{1 + 2\cos(\phi - \pi/3)}. \tag{2.170}$$

Izračunajte minimalnu udaljenost kometa od Sunca, kao i kuteve za koje orbita divergira. Skicirajte orbitu.

Općeniti oblik putanje u Keplerovom problemu glasi

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + e\cos(\phi - \phi_0)} \tag{2.171}$$

Ekscentricitet orbite je veći od jedan pa možemo zaključiti da se radi o hiperboli. Komet se nalazi u perihelu kada nazivnik orbite ima maksimalnu vrijednost

$$\cos(\phi_p - \pi/3) = 1 \Longrightarrow \phi_p = \pi/3. \tag{2.172}$$

Položaj perihela: $\phi_p = \pi/3$, $r_{min} = 2/3$. Orbita divergira u nul-točkama nazivnika

$$\cos(\phi_\infty - \phi_0) = -\frac{1}{e} = -\frac{1}{2}. \tag{2.173}$$

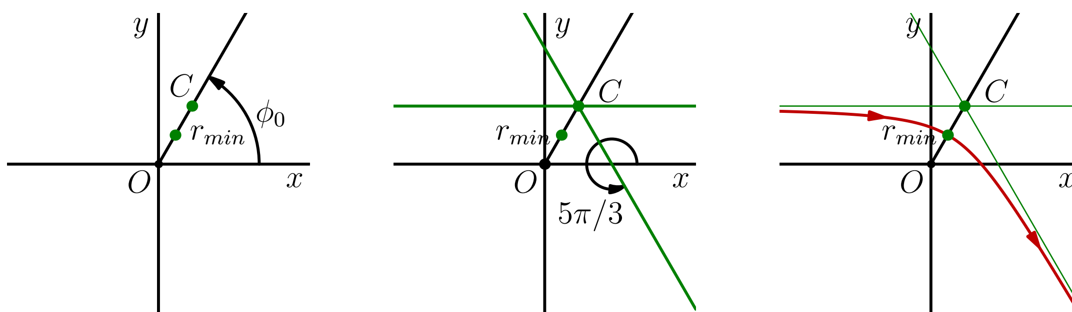
Postoje dva moguća rješenja

$$\phi_\infty - \phi_0 = \pi \pm \frac{\pi}{3} \Longrightarrow \phi_\infty^{(1)} = \pi \quad \text{i} \quad \phi_\infty^{(2)} = \frac{5\pi}{3}, \tag{2.174}$$

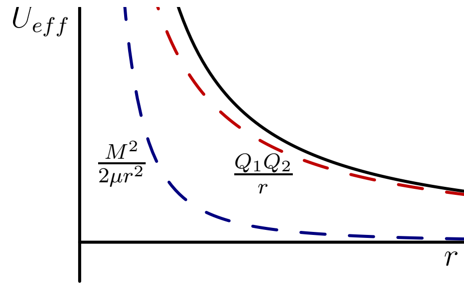
pri čemu smo iskoristili $\phi_0 = \pi/3$. Da bi lakše skicirali orbitu potrebna nam je i udaljenost centra hiperbole od ishodišta, odnosno centra sile

$$c = \frac{ep}{e^2 - 1} = \frac{4}{3}. \tag{2.175}$$

U slučaju $\phi_0 \neq 0$ centar hiperbole se, kao i perihel, nalazi na pravcu koji zatvara kut ϕ_0 s osi x, dok asimptote hiperbole zatvaraju kuteve $\phi_\infty^{(1)}$ i $\phi_\infty^{(2)}$ s osi x i prolaze kroz centar hiperbole



Slika 2.25: Prvo nacrtamo pravac koji zatvara kut ϕ_0 s osi x (os hiperbole) i na njemu označimo perihel i centar hiperbole. Zatim povučemo asimptote hiperbole. Jedna asimptota zatvara kut $5\pi/3$ s osi x, dok druga zatvara kut π (horizontalni pravac). Na kraju skiciramo samu hiperbolu koja prolazi kroz perihel i približava se asimptotama.



Slika 2.26: Efektivni potencijal za odbojno Coulombovo međudjelovanje. Plavom isprekidanom linijom je označen centrifugalni doprinos, crvenom isprekidanom linjom Coulombov odbojni potencijal, a punom crnom linijom ukupni efektivni potencijal.

2.6 Gibanje u Coulombovom potencijalu

Za razliku od gravitacionog potencijala koji može biti samo privlačan, Coulombov potencijal

$$U(r) = \frac{Q_1Q_2}{r} = -\frac{k}{r} \quad \text{gdje je} \quad k \equiv -Q_1Q_2 \tag{2.176}$$

može biti i odbojan ako su naboji istog predznaka. U tom slučaju, bitna razlika u odnosu na Keplerov problem vidi se već na efektivnom potencijalu koji je odbojan za sve vrijednosti varijable r. Moguće su samo neomeđne orbite s pozitivnom energijom. Izvod Keplerove orbite koji kreće od integralne jednakosti

$$\phi - \phi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{M dr'}{r'^2\sqrt{2\mu\left(E + \frac{k}{r'}\right) - \frac{M^2}{r'^2}}} \tag{2.177}$$

vrijedi i u slučaju odbojnog Coulombovog potencijala pa i dalje možemo koristiti rezultat

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\phi, \tag{2.178}$$

gdje su parametri orbite

$$p = \frac{M^2}{k\mu} \quad \text{i} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\mu k^2}}. \tag{2.179}$$

Bitno je uočiti da je parametar orbite p sada negativan jer je konstanta k negativna.

2.6.1 Usporedba privlačnog i odbojnog potencijala

Jednadžbu orbite za gibanje u odbojnom Coulombovom potencijalu možemo napisati preglednije koristeći relaciju $p = -|p|$

$$r(\phi) = \frac{|p|}{-1 - e\cos\phi}. \tag{2.180}$$

Udaljenost čestice od centra polja je po definiciji pozitivna pa je orbita definirana samo za one kuteve, za koje vrijedi

$$-1 - e\cos\phi > 0 \Longrightarrow \cos\phi < -\frac{1}{e}. \tag{2.181}$$

Interval dozvoljenih kuteva komplementaran je intervalu dozvoljenih kuteva kod privlačnog potencijala.

2.6.2 Orbite u odbojnom Coulombovom potencijalu

Orbita u odbojnom potencijalu glasi

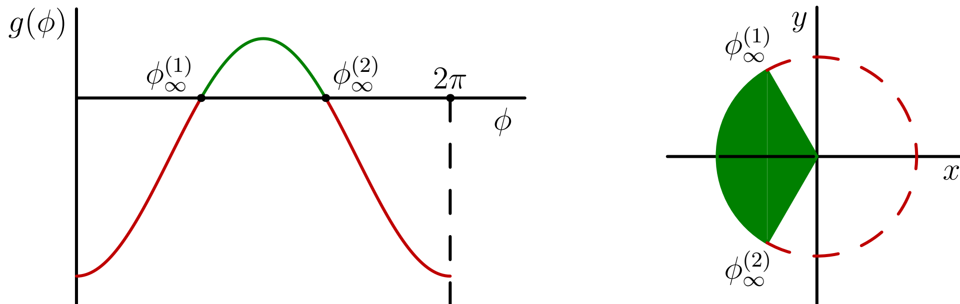
$$r = \frac{-|p|}{1 + e\cos\phi} \Longrightarrow r + er\cos\phi = -|p|. \tag{2.182}$$

Prebacimo li jednadžbu orbite u Kartezijeve koordinate

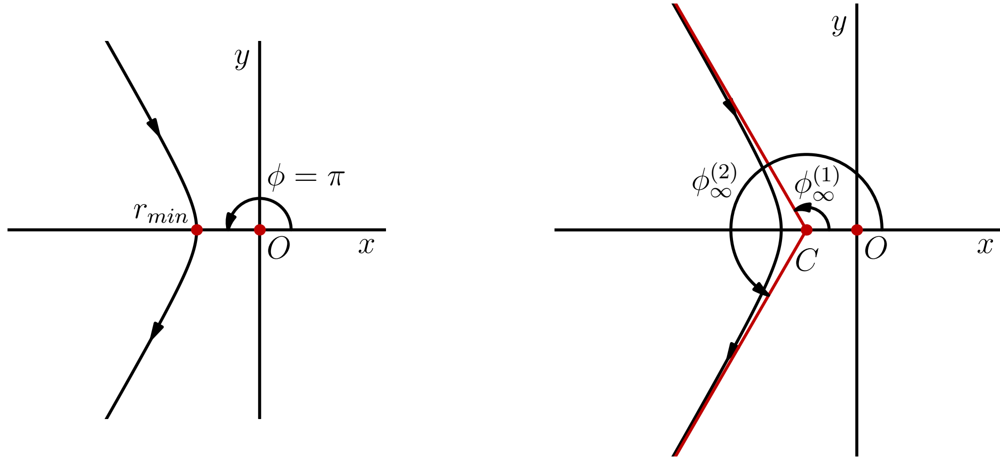
$$\frac{(e^2-1)^2}{|p|^2}\left[x + \frac{|p|e}{e^2-1}\right]^2 - \frac{e^2-1}{|p|^2}y^2 = 1, \tag{2.183}$$

možemo prepoznati hiperbolu. Velika i mala poluos iznose

$$a = \frac{|p|}{e^2-1} \quad \text{i} \quad b = \frac{|p|}{\sqrt{e^2-1}} = a\sqrt{e^2-1}, \tag{2.184}$$



Slika 2.27: Interval kuteva dostupan čestici.



Slika 2.28: Pericentar i asimpotote hiperbole u odbojnom Coulombovom potencijalu.

dok je centar hiperbole pomaknut od ishodišta za

$$c = -\frac{|p|e}{e^2 - 1} = -ea. \tag{2.185}$$

Čestica se nalazi na minimalnoj udaljenosti od centra polja za kut $\phi = \pi$ jer nazivnik orbite tada ima maksimalnu vrijednost

$$r_{min} = \frac{|p|}{-1 + e}. \tag{2.186}$$

Karakteristika neomeđenih orbita u odbojnom Coulombovom potencijalu jer da čestica pri prolasku kroz pericentar ne "zaobilazi" centar sile. Asimptote hiperbole prolaze kroz centar hiperbole i zatvaraju kuteve $\phi_\infty^{(1)}$ i $\phi_\infty^{(2)}$ s osi x. Kao i u slučaju privlačnog gravitacijskog potencijala, možemo izračunati ulazni parametar orbite. Iz pravokutnog trokuta na sl. 2.29 slijedi

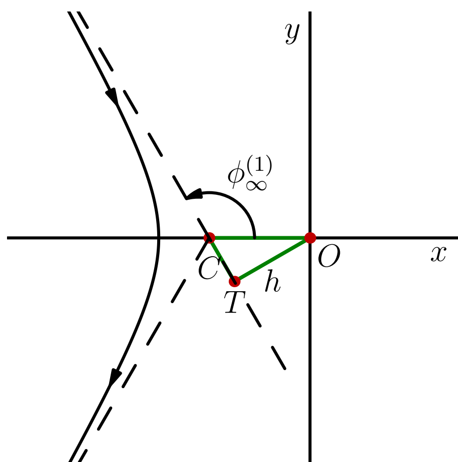
$$h = |\overline{OC}| \sin(\pi - \phi_\infty) = |\overline{OC}| \sin\phi_\infty. \tag{2.187}$$

Uvrstimo udaljenost centra hiperbole od ishodišta (2.141)

$$h = \frac{pe}{e^2 - 1} \sin\phi_\infty = \frac{pe}{e^2 - 1}\sqrt{1 - \cos^2\phi_\infty}, \tag{2.188}$$

a zatim iskoristimo uvjet (2.144)

$$h = \frac{pe}{e^2 - 1}\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}} = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}. \tag{2.189}$$



Slika 2.29: Ulazni parametar čestice koja se giba u odbojnom Coulombovom potencijalu.

Konačno, ako parametar p i ekscentricitet e izrazimo pomoću energije i momenta količine gibanja

$$h = \frac{M}{\sqrt{2E\mu}}. \tag{2.190}$$

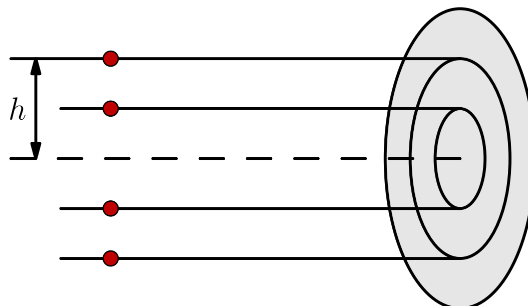
3 Problem raspršenja

3.1 Pojam udarnog presjeka

Često promatramo procese koji uključuju homogene snopove čestica. Osnovna karakteristika snopa je njegov intenzitet, a definiramo ga kao broj čestica koje prolaze u jedinici vremena kroz jedinicu površine okomitu na snop. Udarni presjek za neki općeniti događaj odgovara omjeru broja događaja u jedinici vremena i intenziteta snopa

$$\sigma = \frac{\text{broj događaja u jedinici vremena}}{\text{intenzitet snopa}}, \tag{3.1}$$

a ima dimenziju površine (m^2). Veći udarni presjek znači veći broj događaja u jedinici vremena. Bitnu ulogu u daljnjim razmatranjima imat će ulazni parametar čestice (obično ga označavamo s h), odnosno udaljenost pojedine čestice od osi snopa.



Slika 3.1: Homogeni snop čestica. Intenzitet snopa definiramo kao broj čestica koje prolaze u jedinici vremena kroz jedinicu površine okomitu na snop. Čestice u snopu razlikujemo samo po udaljenosti od osi snopa (ulazni parametar, h).

Primjer 3.1

Izračunajte udarni presjek za proces padanja čestica u centar polja

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}.$$

Efektivni potencijal

$$U_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{M^2}{2mr^2} = \left(\frac{M^2}{2m} - \alpha\right)\frac{1}{r^2}, \quad (3.2)$$

može biti pozitivan ($M^2 > 2m\alpha$) ili negativan ($M^2 < 2m\alpha$). U prvom slučaju čestica nikad ne može pasti u centar polja, dok u drugom slučaju uvijek pada u centar polja. Dakle, čestica pada u centar polja ako vrijedi

$$M^2 \leq 2m\alpha. \quad (3.3)$$

Trebamo naći vrijednosti ulaznog parametra za koje je prethodna relacija ispunjena. Ulazni parametar h i brzinu čestice v_∞ daleko od centra polja možemo povezati s energijom E i momentom količine gibanja čestice

$$M = mhv_\infty \quad \text{i} \quad E = \frac{m}{2}v_\infty^2 \Longrightarrow M = \sqrt{2mE}h. \quad (3.4)$$

U centar polja padaju čestice za koje vrijedi

$$M^2 \leq 2m\alpha \Longrightarrow 2mEh^2 \leq 2m\alpha \Longrightarrow h \leq \sqrt{\frac{\alpha}{E}} \equiv h_{max}, \quad (3.5)$$

odnosno čestica čija Udarni presjek za proces padanja čestice u centar polja

$$\sigma = \frac{\text{broj čestica koje padaju u centar polja u jedinici vremena}}{\text{intenzitet snopa}}. \quad (3.6)$$

Broj čestica koje padaju u centar polja u jedinici vremena jednak je površini $h_{max}^2\pi$ pomnoženoj s intenzitetom snopa

$$\sigma = h_{max}^2\pi = \frac{\alpha}{E}\pi. \quad (3.7)$$

3.2 Diferencijalni udarni presjek

3.2.1 Pojam prostornog kuta

Prostorni kut je dio prostora ograničenog pravcima koji izlaze iz jedne točke (vrha) prema svim točkama neke zatvorene krivulje. Karakterizira vidni kut pod kojim opažač iz vrha vidi zadanu krivulju, a mjera mu je površina izrezana na kugli jediničnog polumjera sa središtem u vrhu kuta. Jedinica za prostorni kut je steradijan (str).

Ukupni prostorni kut

Ukupni prostorni kut jednak je površini sfere jediničnog radijusa. Integriramo po kutevima θ i ϕ

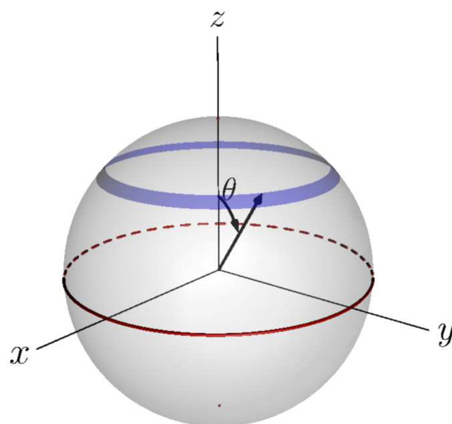
$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi. \tag{3.8}$$

Kao što opseg kružnice jedničnog radijusa iznosi 2π, tako i površina sfere jediničnog radijusa iznosi 4π.

Infinitezimalni element prostornog kuta

Infinitezimalna površina na sferi jediničnog radijusa iznosi

$$d\Omega = d\phi \sin\theta d\theta. \tag{3.9}$$



Slika 3.2: Osnosimetričan infinitezimalni element površine na sferi jediničnog radijusa.

Problemi raspršenja najčešće su osnosimetrični pa po kutu ϕ možemo integrirati

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta. \tag{3.10}$$

3.2.2 Računanje diferencijalnog udarnog presjeka

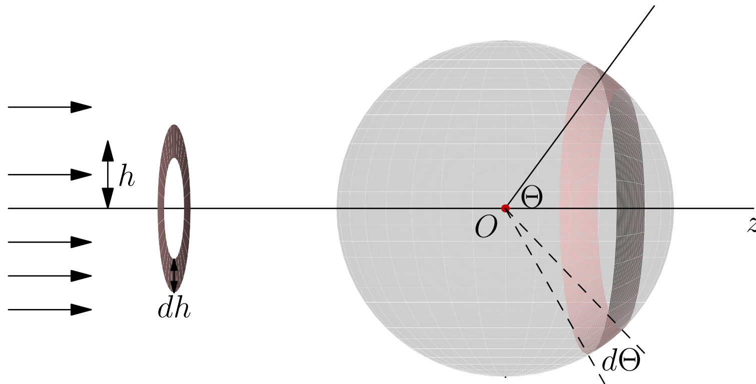
U procesu raspršenja, ne promatramo jednu česticu, nego snop istovrsnih čestica. Nadalje, pretpostavljamo da sve čestice u snopu imaju istu energiju, kao i da je snop osnosimetričan. Koordinatni sustav orjentiramo tako da se centar polja, na kojem se snop raspršuje, nalazi u ishodištu, dok se snop prije raspršenja giba paralelno s osi z. Nakon raspršenja, svaka čestica iz snopa otkloni se za neki kut u odnosu na ulazni smjer kretanja. Detektorom možemo izmjeriti koliko se čestica rasprši u jedinici vremena u infinitezimalni element prostornog kuta $d\Omega$ u smjeru Ω. Diferencijalni udarni presjek nam daje informaciju o tome koliko se čestica raspršilo pod kojim kutem, a definiramo ga na sljedeći način

$$\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{\text{broj čestica raspršen u smjeru } \Omega \text{ u jedinici vremena}}{\text{ulazni intenzitet snopa}}. \tag{3.11}$$

Problem je osnosimetričan pa diferencijalni udarni presjek ovisi samo o kutu Θ, a ne i o kutu ϕ. Po kutu ϕ možemo integrirati, što daje faktor 2π

$$\sigma(\Omega)d\Omega = 2\pi\sigma(\Theta)\sin\Theta d\Theta. \tag{3.12}$$

Čestice u snopu razlikuju se samo po udaljenosti od osi snopa (ulaznom parametru), odnosno po iznosu momenta količine gibanja. Sve čestice s jednakim momentom količine gibanja (sjetimo se da sve čestice imaju jednaku energiju) rasprše se pod istim kutem Θ. Drugim riječima, veza između ulaznog parametra h i kuta raspršenja Θ je jednoznačna. Broj čestica koje se u jedinici vremena rasprše u



Slika 3.3: Proces raspršenja na centralnom potencijalu.

intervalu (Θ, $\Theta + d\Theta$) jednak je broju čestica u snopu s ulaznim parametrom u intervalu (h, $h + dh$). Sa sl. 3.3 slijedi da je taj broj jednak broju čestica koje prolaze kroz kružni vijenac omeđen kružnicama radijusa h i $h + dh$. Budući da je površina takvog kružnog vijenca $2\pi h dh$, broj čestica koje prođu kroz njega iznosi

$$dN = 2\pi I h dh. \tag{3.13}$$

Iz definicije diferencijalnog udarnog presjeka slijedi

$$2\pi\sigma(\Theta)\sin\Theta|d\Theta| = \frac{dN}{I} = 2\pi h|dh|. \tag{3.14}$$

Dakle, diferencijalni udarni presjek iznosi

$$\sigma(\Theta) = \frac{h}{\sin\Theta}\left|\frac{dh}{d\Theta}\right|. \tag{3.15}$$

Znak apsolutne vrijednosti koristimo zato jer $d\Theta$ i dh imaju suprotne predznake. Čestice s većim ulaznim parametrom se raspršuju pod manjim kutem (slabije osjećaju utjecaj polja jer prolaze na većoj udaljenosti od centra polja). Ukupni udarni presjek računamo integriranjem diferencijalnog udarnog presjeka po cijelom prostornom kutu

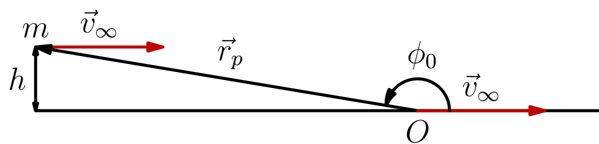
$$\sigma_{tot} = \int \sigma(\Omega)d\Omega = 2\pi\int_0^\pi \sigma(\Theta)\sin\Theta d\Theta. \tag{3.16}$$

Pri opisu procesa raspršenja obično umjesto momenta količine gibanja i energije koristimo sljedeći set parametara

- brzina čestice daleko od centra raspršenja: v_∞
- ulazni parametar čestice: h

Daleko od centra raspršenja potencijal teži k nuli pa možemo napisati

$$E = \frac{m}{2}v_\infty^2. \tag{3.17}$$



Slika 3.4: Čestica se približava centru polja O.

Sa sl. 3.4 vidimo da vrijedi

$$M = m\,|\vec{r}_p \times \vec{v}_\infty| = mv_\infty r_p \sin\phi_0 = mv_\infty h. \tag{3.18}$$

Veza između dva seta parametara glasi

$$E = \frac{m}{2}v_\infty^2 \quad \text{i} \quad M = mhv_\infty. \tag{3.19}$$

3.2.3 Raspršenje na nepomičnoj sferi

Promatramo homogeni snop čestica koji nalijeće na nepomičnu sferu i od nje se elastično odbije, kao na sl. 3.5. Otklon čestice od početne putanje iznosi $\pi - 2\alpha$ i jednoznačno je određen ulaznim parametrom h

$$\sin\alpha = \frac{h}{R} \Longrightarrow \cos\frac{\Theta}{2} = \frac{h}{R}. \tag{3.20}$$

Da bi izračunali diferencijalni udarni presjek koristimo vezu ulaznog parametra h i kuta raspršenja Θ

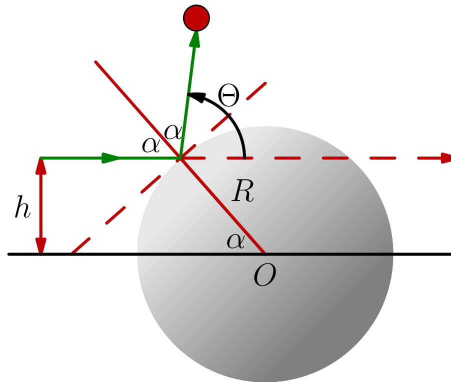
$$h = R\cos\frac{\Theta}{2} \Longrightarrow \frac{dh}{d\Theta} = -\frac{R}{2}\sin\frac{\Theta}{2}. \tag{3.21}$$

Iskoristimo izraz za diferencijalni udarni presjek (3.15)

$$\sigma(\Theta) = \frac{h}{\sin\Theta}\left|\frac{dh}{d\Theta}\right| = \frac{R^2\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Theta}{2}}{4\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Theta}{2}} = \frac{1}{4}R^2. \tag{3.22}$$

Diferencijalni udarni presjek u ovom slučaju ne ovisi o kutu raspršenja Θ. Ukupni udarni presjek izračunamo integriranjem po cijelom prostornom kutu. U ovom slučaju, to znači da diferencijalni udarni presjek pomnožimo s faktorom 4π

$$\sigma_{tot} = R^2\pi. \tag{3.23}$$



Slika 3.5: Čestica se raspršuje na nepomičnoj sferi.

Ovakav rezultat smo mogli očekivati jer samo čestice s ulaznim parametrom manjim od radijusa sfere udaraju u sferu i raspršuju se.

3.2.4 Ruthefordova formula

Cilj nam je povezati kut raspršenja na Coulombovom potencijalu i ulazni parametar čestice. Polazimo od relacije

$$\Theta = \pi - 2(\pi - \phi_\infty) = 2\phi_\infty - \pi \Longrightarrow \phi_\infty = \frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{2}. \tag{3.24}$$

Kut ϕ_∞ direktno je povezan s ekscentricitetom

$$\cos\phi_\infty = -\frac{1}{e}. \tag{3.25}$$

Ekscentricitet možemo izraziti pomoću ulaznog parametara h i brzine v_∞

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\mu k^2}} = \sqrt{1 + \frac{\mu^2 v_\infty^4 h^2}{k^2}}. \tag{3.26}$$

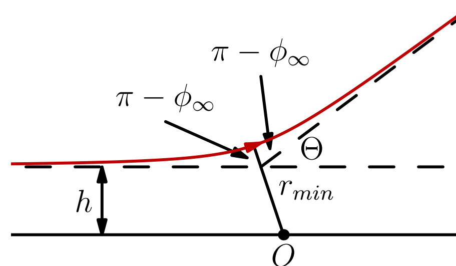
Sada možemo povezati kut raspršenja Θ i ulazni parametar h

$$\cos\phi_\infty = \cos\left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\Theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mu^2 v_\infty^4 h^2}{k^2}}} \tag{3.27}$$

$$\Longrightarrow h^2 = \frac{k^2}{\mu^2 v_\infty^4}\cot^2\frac{\Theta}{2}. \tag{3.28}$$

Da bi izračunali diferencijalni udarni presjek, još moramo derivirati h^2 po kutu raspršenja Θ

$$\frac{dh^2}{d\Theta} = \frac{k^2}{\mu^2 v_\infty^4} 2\cot\frac{\Theta}{2}\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{\Theta}{2}}\right)\frac{1}{2} = -\frac{k^2}{\mu^2 v_\infty^4}\frac{\cos\frac{\Theta}{2}}{\sin^3\frac{\Theta}{2}} \tag{3.29}$$



Slika 3.6: Putanja čestice u odbojnom Coulombovom potencijalu.

Diferencijalni udarni presjek svodi se na

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{2\sin\Theta}\left|\frac{dh^2}{d\Theta}\right| = \frac{k^2}{4\mu^2 v_\infty^4}\frac{1}{\sin^4\frac{\Theta}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{k}{2E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\Theta}{2}}. \tag{3.30}$$

Prethodni izraz zovemo Ruthefordovom formulom, a orginalno je izvedena za raspršenje α-čestica na atomskim jezgrama. Zanimljivo je primjetiti da $\sigma(\Theta)$ ne ovisi o predznaku k, tj. o tome da li je potencijal privlačan ili odbojan. U stvarnom eksperimentu bi morali uzeti u obzir i odboj jezgre, ali ako je projektil puno lakši od mete taj efekt nije velik. Odstupanje eksperimentalnih rezultata od Ruthefordove formule daje informacije o prostornoj raspodjeli naboja unutar jezgre.

Ukupni udarni presjek računamo tako da integriramo po ukupnom prostornom kutu, vodeći računa da nam je zapravo preostao integral po Θ

$$\sigma_{\rm tot} = \frac{1}{4}\left(\frac{k}{2E}\right)^2\int_0^\pi \frac{1}{\sin^4\frac{\Theta}{2}}\sin\Theta d\Theta = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2E}\right)^2\int_0^\pi \frac{\cos\frac{\Theta}{2}}{\sin^3\frac{\Theta}{2}}d\Theta. \tag{3.31}$$

Napravimo supstituciju $u = \sin\frac{\Theta}{2}$

$$\sigma_{\rm tot} = \left(\frac{k}{2E}\right)^2\int_0^1 \frac{du}{u^3}. \tag{3.32}$$

Integral divergira, kao i ukupni udarni presjek. Razlog je beskonačan doseg Coulombovog potencijala, što znači da se svaka čestica bar malo otkloni od početne putanje, bez obzira na to koliko iznosi njezin ulazni parametar.

A Polarni koordinatni sustav

A.1 Definicija polarnog koordinatnog sustava

Položaj točke u ravnini možemo definirati pomoću udaljenosti r od ishodišta i kuta ϕ koji spojnica ishodišta i točke zatvara s osi x Promjena kuta ϕ je po konvenciji pozitivna ako ga mijenjamo u smjeru suprotnom od kazaljke na satu i negativna ako ga mijenjamo u smjeru kazaljke na satu. Vezu kartezijevih i polarnih koordinata možemo izvesti iz pravokutnog trokuta na sl. A.1

$$x = r\cos\phi \quad \text{i} \quad y = r\sin\phi. \tag{A.1}$$

Inverzne relacije glase

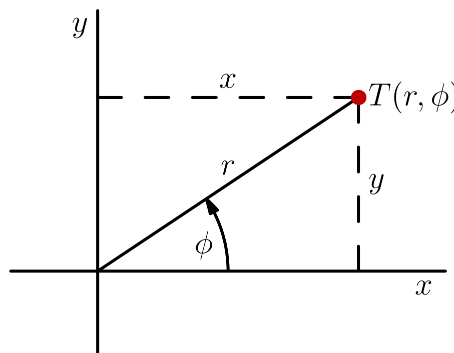
$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{i} \quad \phi = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{A.2}$$

A.2 Primjeri krivulja u polarnim koordinatama

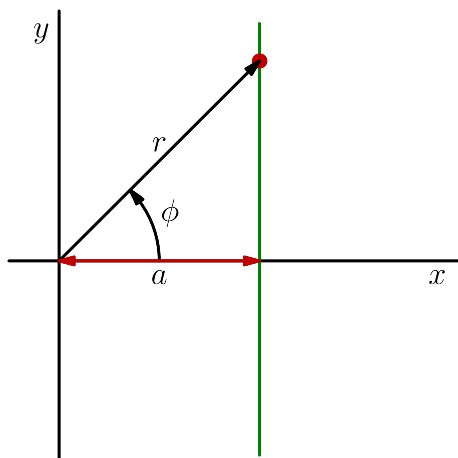
Pravac (I)

Pravac paralelan s osi x zadan je jednadžbom

$$x = a, \tag{A.3}$$



Slika A.1: Položaj točke T u polarnom koordinatnom sustavu.



Slika A.2: Pravac $x = a$.

u Kartezijevim koordinatama. Transformiramo jednadžbu u polarne koordinate

$$x = a \Longleftrightarrow r\cos\phi = a \Longleftrightarrow r = \frac{a}{\cos\phi}. \tag{A.4}$$

Pravac (II)

Pravac paralelan s osi y zadan je jednadžbom

$$y = b, \tag{A.5}$$

u Kartezijevim koordinatama. Transformiramo jednadžbu u polarne koordinate

$$y = b \Longleftrightarrow r\sin\phi = b \Longleftrightarrow r = \frac{b}{\sin\phi}. \tag{A.6}$$

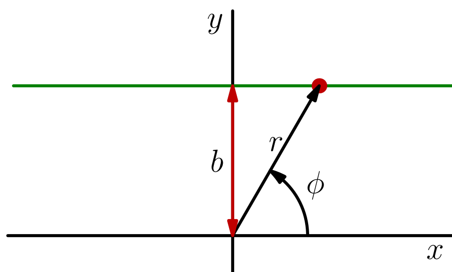
Pravac (III)

Općenitu jednadžbu pravca u kartezijevim koordinatama

$$y = ax + b, \tag{A.7}$$

također možemo transformirati u polarne koordinate

$$r\sin\phi = ar\cos\phi + b. \tag{A.8}$$



Slika A.3: Pravac $y = b$.

Definiramo kut ϕ_0 tako da vrijedi

$$a = \tan\phi_0 \Longrightarrow r\sin\phi\cos\phi_0 - r\cos\phi\sin\phi_0 = b\cos\phi_0 \tag{A.9}$$

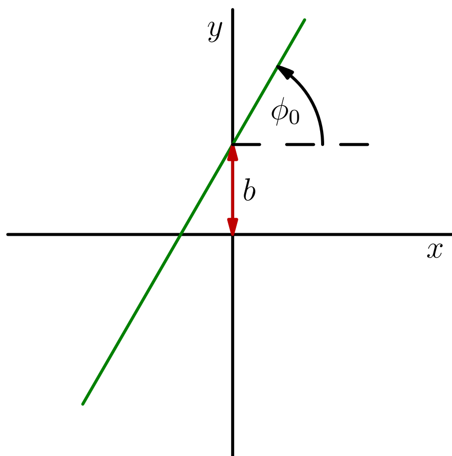
$$\Longrightarrow r\sin(\phi - \phi_0) = b\cos\phi_0 \tag{A.10}$$

$$\Longrightarrow r = \frac{b\cos\phi_0}{\sin(\phi - \phi_0)}. \tag{A.11}$$

Kružnica

Promatramo kružnicu radijusa R sa središtem u točki $T(r_0, \phi_0)$. Jednadžbu u kartezijevim koordinatama

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0 = R^2, \tag{A.12}$$



Slika A.4: Pravac $y = \tan\phi_0 x + b$.

transformiramo u polarne koordinate

$$r^2 + r_0^2 - 2r\cos\phi r_0 \cos\phi_0 - 2r\sin\phi r_0 \sin\phi_0 = R^2. \tag{A.13}$$

Iskoristimo formulu za kosinus razlike kuteva

$$r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0) = R^2. \tag{A.14}$$

Jedn. (A.14) se pojednostavljuje ako je središte kružnice u točki $(R, 0)$

$$r^2 + R^2 - 2rR\cos\phi = R^2 \Longrightarrow r(r - 2R\cos\phi) = 0. \tag{A.15}$$

Slučaj $r = 0$ sadržan je u slučaju $r = 2R\cos\phi$ za $\phi = \pi/2$. Jednadžba kružnice radijusa R sa središtem u točki $(R, 0)$ glasi

$$r = 2R\cos\phi, \tag{A.16}$$

a možemo je izvesti i pomoću Talesovog teorema.

Arhimedova spirala

Arhimedovu spiralu opisuje materijalna točka koja se giba konstantnom brzinom v po zraci koja rotira konstantnom kutnom brzinom ω oko pola O Kut ϕ jednoliko raste

$$\phi = \omega t, \tag{A.17}$$

kao i radijalna udaljenost od ishodišta

$$r = vt. \tag{A.18}$$

Eliminiramo vrijeme iz jedn. (A.17): $t = \phi/\omega$ i definiramo oznaku

$$a \equiv v/\omega. \tag{A.19}$$

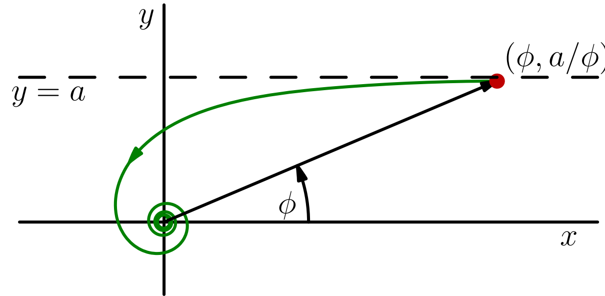
Slijedi jednadžba Arhimedove spirale

$$r = a\phi. \tag{A.20}$$

Hiperbolna spirala

Jednadžba hiperbolne spirale glasi

$$r = \frac{a}{\phi}. \tag{A.21}$$



Slika A.5: Hiperbolna spirala.

Transformiramo jednadžbu krivulje u Kartezijeve koordinate

$$x = r\cos\phi = \frac{a\cos\phi}{\phi} \quad \text{i} \quad x = r\sin\phi = \frac{a\sin\phi}{\phi}. \tag{A.22}$$

Promotrimo granične vrijednosti

$$\lim_{\phi\to 0}\frac{a\cos\phi}{\phi} = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{\phi\to 0}\frac{a\sin\phi}{\phi} = a. \tag{A.23}$$

Pravac $y = a$ je asimptota hiperbolne spirale. Ako kut ϕ raste radijalna udaljenost se smanjuje tj. točka $T(\phi, r(\phi))$ se približava ishodištu.

Logaritamska spirala

Jednadžba logaritamske spirale glasi

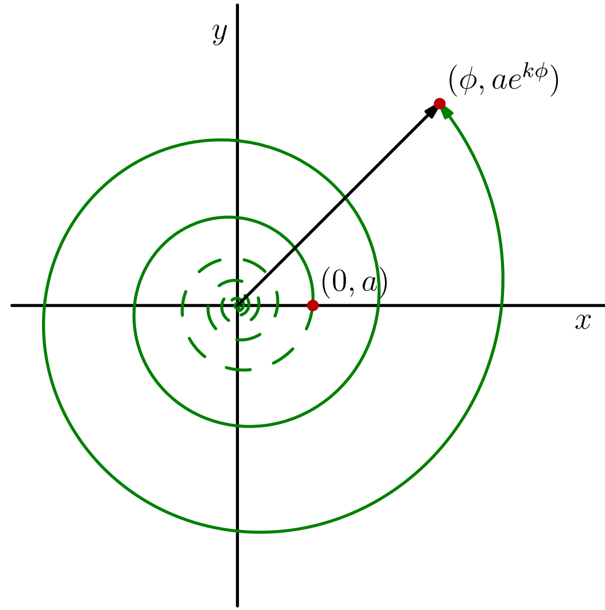
$$r = ae^{k\phi}. \tag{A.24}$$

Uz pretpostavku da je $k > 0$, porastom kuta ϕ radijalna udaljenost $r = ae^{k\phi}$ raste i točka odlazi u beskonačnost. Za vrijednost kuta $\phi = 0$, radijalna udaljenost iznosi a. Daljnjim smanjivanjem kuta ($\phi \to -\infty$) radijalna udaljenost pada i točka se približava ishodištu U slučaju $k < 0$, porastom kuta točka ide prema ishodištu, dok se smanjivanjem kuta ($\phi \to -\infty$) točka udaljava prema beskonačnosti.

A.3 Konične krivulje u polarnim koordinatama

Promatramo točku O i pravac AB udaljen za D od O. Točka P se giba u ravnini xy tako da je omjer njezine udaljenosti od točke O (r) i pravca AB (d) konstantan. Udaljenost od pravca iznosi

$$d = D - r\cos\phi \tag{A.25}$$



Slika A.6: Logaritamska spirala.

Omjer udaljenosti r i d je konstanta ($\equiv e$)

$$\frac{r}{d} = \frac{r}{D - r\cos\phi} \equiv e. \tag{A.26}$$

Slijedi jednadžba konične krivulje u polarnom sustavu

$$r = \frac{eD}{1 + e\cos\phi} \equiv \frac{p}{1 + e\cos\phi}. \tag{A.27}$$

Pri tome smo uveli parametar krivulje

$$p = eD. \tag{A.28}$$

Jedn. (A.27) možemo transformirati u Kartezijeve koordinate

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\phi \Longrightarrow \frac{p}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1 + e\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{A.29}$$

Pomnožimo jedn. (A.29) s $\sqrt{x^2 + y^2}$

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} + ex \Longrightarrow p - ex = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{A.30}$$

Kvadriramo jedn. (A.30)

$$p^2 - 2pex + e^2x^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow (1 - e^2)x^2 + 2pex + y^2 = p^2. \tag{A.31}$$

Izlučimo faktor $1 - e^2$

$$(1 - e^2)\left[x^2 + \frac{2pe}{(1 - e^2)}x\right] + y^2 = p^2, \tag{A.32}$$

a zatim izraz u zagradi nadopunimo do potpunog kvadrata

$$(1 - e^2)\left[x + \frac{pe}{1 - e^2}\right]^2 - \frac{p^2e^2}{1 - e^2} + y^2 = p^2. \tag{A.33}$$

Prebacimo konstantni član na desnu stranu

$$(1 - e^2)\left[x + \frac{pe}{1 - e^2}\right]^2 + y^2 = \frac{p^2}{1 - e^2}, \tag{A.34}$$

a zatim jednadžbu podijelimo s faktorom $p^2/(1 - e^2)$

$$\frac{(1 - e^2)^2}{p^2}\left[x + \frac{pe}{1 - e^2}\right]^2 + \frac{1 - e^2}{p^2}y^2 = 1. \tag{A.35}$$

Ovisno o vrijednosti parametra e razlikujemo četiri slučaja

- kružnica: $e = 0$
- elipsa: $0 < e < 1$
- parabola: $e = 1$
- hiperbola: $e > 1$

Kružnica

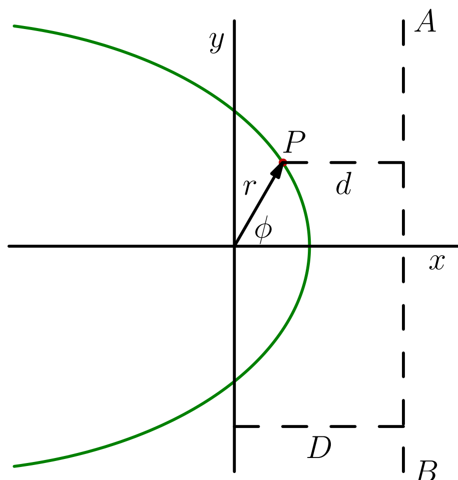
Uz vrijednost ekscentriciteta $e = 0$ jedn. (A.35) se svodi na jednadžbu kružnice radijusa p sa središtem u ishodištu

$$x^2 + y^2 = p^2. \tag{A.36}$$

Elipsa

Da bi jedn. (A.35) prepoznali kao elipsu, definiramo tri veličine

$$a^2 \equiv \frac{p^2}{(1 - e^2)^2}, \quad b^2 \equiv \frac{p^2}{1 - e^2}, \quad c \equiv \frac{pe}{1 - e^2}. \tag{A.37}$$



Slika A.7: Definicija konične krivulje. Omjer udaljenosti točke P od ishodišta i pravca AB je konstantan.

Parametar b^2 je sigurno pozitivan jer vrijedi $0 < e < 1$. Jedn. (A.35) sada možemo napisati u sljedećem obliku

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{A.38}$$

Prepoznajemo jednadžbu elipse s poluosima

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad \text{i} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{A.39}$$

Centar elipse je pomaknut od ishodišta za $-c$, pri čemu je

$$c = \frac{pe}{1-e^2} = ae. \tag{A.40}$$

Parabola

Približavanjem ekscentriciteta e vrijednosti $e = 1$, dalji fokus elipse se sve više udaljava od ishodišta. U graničnom slučaju $e = 1$ postaje beskonačno udaljen i krivulja više nije omeđena. Uvrstimo li $e = 1$ u jedn. (A.35), dobit ćemo jednadžbu parabole u Kartezijevim koordinatama

$$y^2 = -2px + p^2 = p(p-2x). \tag{A.41}$$

Parabola (A.41) siječe os x u točki $(p/2, 0)$, a os y u točkama $(0, \pm p)$.

Hiperbola

Da bi jedn. (A.35) prepoznali kao hiperbolu, ponovo definiramo tri veličine

$$a^2 \equiv \frac{p^2}{(e^2-1)^2}, \quad b^2 \equiv \frac{p^2}{e^2-1}, \quad c \equiv -\frac{pe}{e^2-1}. \tag{A.42}$$

Parametar b^2 je sigurno pozitivan jer vrijedi $e > 1$. Jedn. (A.35) sada možemo napisati u obliku

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{A.43}$$

koji prepoznajemo kao jednadžbu hiperbole s poluosima

$$a = \frac{p}{e^2-1} \quad \text{i} \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}. \tag{A.44}$$

Centar hiperbole je pomaknut od ishodišta za

$$c = \frac{pe}{e^2-1} = ea. \tag{A.45}$$

Neka bitna svojstva hiperbole možemo izvesti promatrjući njezinu jednadžbu u polarnim koordinatama

$$r(\phi) = \frac{p}{1+e\cos\phi}. \tag{A.46}$$

Krivulja dolazi najbliže ishodištu kada je nazivnik maksimalan tj. za $\phi = 0$

$$r_{min} = r(\phi = 0) = \frac{p}{1+e}. \tag{A.47}$$

Jedn. (A.46) divergira kada nazivnik padne na nulu

$$1 + e\cos\phi_\infty = 0 \Longrightarrow \cos\phi_\infty = -\frac{1}{e}. \tag{A.48}$$

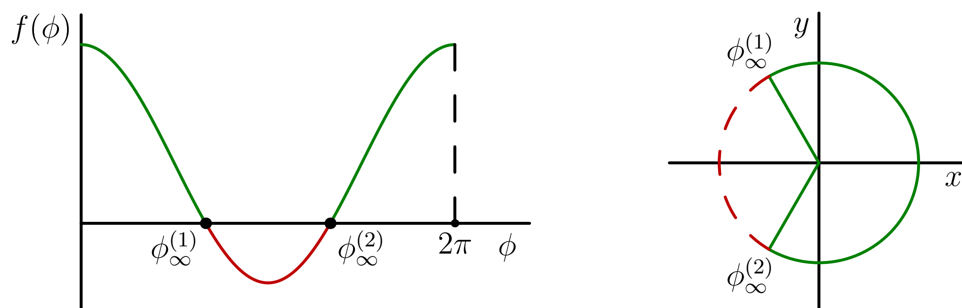
Jednadžba sigurno ima rješenje jer je ekscentricitet veći od jedan. Funkcija kosinus je negativna u drugom i trećem kvadrantu pa jedn. (A.48) ima dva rješenja

$$\phi_\infty^{(1)} = \pi - \arccos(1/e) \quad \text{i} \quad \phi_\infty^{(2)} = \pi + \arccos(1/e). \tag{A.49}$$

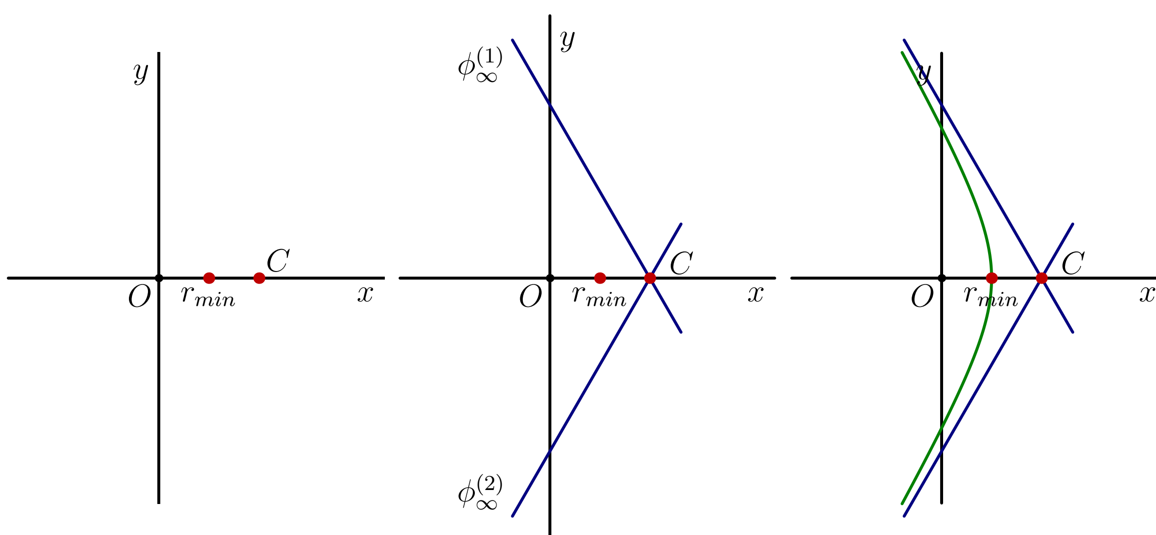
Budući da je udaljenost točke od ishodišta po definiciji pozitivna, jedn. (A.46) je definirana samo ako vrijedi

$$1 + e\cos\phi > 0. \tag{A.50}$$

Na sl. A.8 je ilustriran postupak određivanja dozvoljenog raspona kuteva. U poglavlju A.4 ćemo pokazati da hiperbola ima dvije asimptote koje prolaze kroz centar hiperbole. Jedna asimptota zatvara kut ϕ_1^∞, a druga ϕ_2^∞ s osi x. Hiperbolu je najjednostavnije skicirati u nekoliko koraka:



Slika A.8: Određivanje raspona dozvoljenih kuteva. Lijevo: graf funkcije $f(\phi) = 1 + e\cos\phi$. Orbita je definirana samo ako vrijedi $f(\phi) > 0$. Desno: zelenom bojom su označeni dozvoljeni, a crvenom zabranjeni kutevi.



Slika A.9: Centar hiperbole i minimalna udaljenost hiperbole od ishodišta (lijevo). Asimptote hiperbole (sredina). Konačna skica hiperbole (desno).

- izračunamo kuteve u kojima jednadžba hiperbole divergira $\phi_\infty^{(1)}$ i $\phi_\infty^{(2)}$
- izračunamo minimalnu udaljenost krivulje od ishodišta r_{min} i položaj centra hiperbole $C(c, 0)$, te ih označimo na osi x
- kroz centar hiperbole provučemo asimptote koje zatvaraju kuteve $\phi_\infty^{(1)}$ i $\phi_\infty^{(2)}$ s osi x
- na kraju napravimo skicu hiperbole

A.4 Asimptote krivulje u polarnim koordinatama

Krivulju zadanu u polarnim koordinatama $r(\phi)$ napišemo u parametarskom obliku

$$x(\phi) = r(\phi)\cos\phi \quad \text{i} \quad y(\phi) = r(\phi)\sin\phi. \tag{A.51}$$

Provjerimo postoji li vrijednost kuta ϕ za koju jedna od funkcija $x(\phi)$ ili $y(\phi)$ divergira, a druga ostaje konačna Ako postoji kut ϕ_0 sa svojstvom

$$\lim_{\phi\to\phi_0} x(\phi) = A \quad \text{i} \quad \lim_{\phi\to\phi_0} y(\phi) = \infty, \tag{A.52}$$

krivulja ima vertikalnu asimptotu $x = A$. Ako postoji kut ϕ_0 sa svojstvom

$$\lim_{\phi\to\phi_0} x(\phi) = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{\phi\to\phi_0} y(\phi) = B, \tag{A.53}$$

krivulja ima horizontalnu asimptotu $y = B$. Ako obje funkcije divergiraju

$$\lim_{\phi\to\phi_0} x(\phi) = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{\phi\to\phi_0} y(\phi) = \infty, \tag{A.54}$$

ali pritom vrijedi

$$\lim_{\phi\to\phi_0} \frac{y(\phi)}{x(\phi)} = k \quad \text{i} \quad \lim_{\phi\to\phi_0} [y(\phi) - kx(\phi)] = b, \tag{A.55}$$

krivulja ima kosu asimptotu

$$y = kx + b. \tag{A.56}$$

A.4.1 Asimptote hiperbole

Jednadžbu hiperbole

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + e\cos\phi}, \quad e > 1, \tag{A.57}$$

možemo napisati u parametarskom obliku

$$x(\phi) = \frac{p\cos\phi}{1 + e\cos\phi} \quad \text{i} \quad y(\phi) = \frac{p\sin\phi}{1 + e\cos\phi}. \tag{A.58}$$

Obje funkcije divergiraju u slučaju $\cos\phi_\infty = -1/e$

$$\phi_\infty^{(1)} = \pi - \arccos(1/e) \quad \text{i} \quad \phi_\infty^{(2)} = \pi + \arccos(1/e). \tag{A.59}$$

Dakle, ne postoje vertikalne ni horizontalne asimptote. Preostalo je provjeriti postoje li kose asimptote i ako postoje odrediti im koeficijente smjera i odsječak na osi y. Da bi odredili koeficijent smjera moguće asimptote tražimo limes

$$\lim_{\phi\to\phi_\infty} \frac{y(\phi)}{x(\phi)} = \tan\phi_\infty. \tag{A.60}$$

Svaki od kuteva (A.59) daje drugi koeficijent smjera

$$k_1 = \tan\phi_\infty^{(1)} = -\sqrt{e^2-1} \quad \text{i} \quad k_2 = \tan\phi_\infty^{(2)} = \sqrt{e^2-1}. \tag{A.61}$$

Sada tražimo odsječak na osi y

$$b = \lim_{\phi\to\phi_\infty} [y(\phi) - kx(\phi)] \tag{A.62}$$

$$= \lim_{\phi\to\phi_\infty} \left[\frac{p}{1+e\cos\phi}\left(\sin(\phi) - k\cos(\phi)\right)\right] \tag{A.63}$$

$$= \lim_{\phi\to\phi_\infty} \left[\frac{p}{1+e\cos\phi}\left(\sin(\phi) - \tan\phi_\infty\cos(\phi)\right)\right] \tag{A.64}$$

$$= \frac{p}{\cos\phi_\infty} \lim_{\phi\to\phi_\infty} \frac{\sin(\phi-\phi_\infty)}{1+e\cos\phi} \tag{A.65}$$

$$= -pe \lim_{\phi\to\phi_\infty} \frac{\sin(\phi-\phi_\infty)}{1+e\cos\phi}. \tag{A.66}$$

U zadnjem koraku smo iskoristili uvjet $\cos\phi_\infty = -1/e$ Primjenimo L'Hospitalovo pravilo

$$b = -pe \lim_{\phi\to\phi_\infty} \frac{\cos(\phi-\phi_\infty)}{-e\sin\phi} = \frac{p}{\sin\phi_\infty}. \tag{A.67}$$

Za svaki kut smo dobili odsječak na osi y

$$b_1 = \frac{p}{\sin\phi_\infty^{(1)}} = \frac{pe}{\sqrt{e^2-1}} \tag{A.68}$$

$$b_2 = \frac{p}{\sin\phi_\infty^{(2)}} = -\frac{pe}{\sqrt{e^2-1}}. \tag{A.69}$$

Konačno, asimptote hiperbole glase

$$y_1 = -\sqrt{e^2-1}x + \frac{pe}{\sqrt{e^2-1}} \tag{A.70}$$

$$y_2 = \sqrt{e^2-1}x - \frac{pe}{\sqrt{e^2-1}}. \tag{A.71}$$

Prisjetimo se relacija

$$a = \frac{p}{e^2-1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}, \quad c = \frac{pe}{e^2-1}. \tag{A.72}$$

Jedn. (A.70,A.71) možemo napisati u obliku

$$y_1 = -\frac{b}{a}x + \frac{bc}{a} = -\frac{b}{a}\left(x - c\right) \tag{A.73}$$

$$y_2 = \frac{b}{a}x - \frac{bc}{a} = \frac{b}{a}\left(x - c\right). \tag{A.74}$$

Asimptote se sijeku u centru hiperbole $C(c, 0)$. Jedna asimptota ima nagib $\phi_\infty^{(1)}$, a druga $\phi_\infty^{(2)}$ prema osi x.

Klasična mehanika 1

Treći dio

Lagrangeova formulacija klasične mehanike.

September 24, 2015

Sadržaj

*

1 Virijalni teorem

1.1 Homogene funkcije i Eulerov teorem

Za funkciju f kažemo da je homogena reda k ako vrijedi sljedeća relacija

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1.1}$$

Neka je f homogena funkcija reda k koja ovisi o n varijabli

$$U(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k U(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.2}$$

Eulerov teorem glasi

$$\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} x_j = kf, \tag{1.3}$$

a dokazujemo ga polazeći od relacije

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_j}{x_1}, \ldots\right). \tag{1.4}$$

Lijevu stranu Eulerovog teorema rastavimo na dva člana

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left[x_1^k f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_j}{x_1}, \ldots\right)\right] + \sum_{j>1} x_j x_1^k \frac{\partial}{\partial x_j} f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_j}{x_1}, \ldots\right). \tag{1.5}$$

Definiramo oznaku $\xi_j = x_j/x_1$, a zatim deriviramo prvi član

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left[x_1^k f\left(1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots\right)\right] = k x_1^k f\left(1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots\right) - x_1^{k+1} \sum_{j>1} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{x_j}{x_1^2}. \tag{1.6}$$

Derivacija drugog člana je jednostavna

$$\sum_{j>1} x_j x_1^k \frac{\partial}{\partial x_j} f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_j}{x_1}, \ldots\right) = \sum_{j>1} x_j x_1^k \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_j} f\left(1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots\right). \tag{1.7}$$

Zbrojimo jedn. (1.6) i (1.7) i preostaje

$$\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} x_j = k x_1^k f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_j}{x_1}, \ldots\right) = kf\left(x_1, \ldots, x_j, \ldots\right), \tag{1.8}$$

čime je Eulerov teorem dokazan.

1.1.1 Izvod virijalnog teorema

Kinetička energija, napisana u Kartezijevim koordinatama je homogena funkcija drugog stupnja

$$T(\lambda\dot{x}_1,\ldots,\lambda\dot{x}_j,\ldots) = \lambda^2 T(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_j,\ldots), \tag{1.9}$$

pa prema Eulerovom teoremu vrijedi

$$\sum_j \dot{x}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = 2T. \tag{1.10}$$

Istovremeno, znamo da vrijedi

$$\frac{dT}{d\dot{x}_j} = \frac{d}{d\dot{x}_j}\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = m_j \dot{x}_j = p_j, \tag{1.11}$$

odnosno

$$2T = \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = \sum_j p_j v_j = \sum_j p_j \frac{dx_j}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_j p_j x_j\right) - \sum_j \dot{p}_j x_j. \tag{1.12}$$

Uvrstimo Newtonovu jednadžbu

$$2T = \frac{d}{dt}\left(\sum_j p_j x_j\right) + \sum_j x_j \frac{\partial U}{\partial x_j}, \tag{1.13}$$

a uz pretpostavku da je potencijalna energija homogena funkcija reda k dolazimo do zaključka

$$2T = \frac{d}{dt}\left(\sum_j p_j x_j\right) + kU. \tag{1.14}$$

Neka je putanja u konfiguracijskom prostoru, a time i u faznom prostoru, periodička. U tom slučaju vrijedi

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{d}{dt}\left(\sum_j p_j x_j\right) dt = 0. \tag{1.15}$$

Zapravo je dovoljno pretpostaviti da je u putanja omeđena u faznom prostoru i izračunati limes

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{d}{dt}\left(\sum_j p_j x_j\right) dt = 0. \tag{1.16}$$

Jedn. (1.16) predstavlja poopćenje jedn. (1.15). Primjenjujemo vremensko usrednjenje

$$\overline{F} \equiv \frac{1}{T}\int_0^T F dt \quad \text{ili} \quad \overline{F} \equiv \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau F dt, \tag{1.17}$$

na jedn. (1.13) dolazimo do relacije

$$2\overline{T} = \overline{\sum_j x_j \frac{\partial U}{\partial x_j}}. \tag{1.18}$$

Desna strana naziva se Clausiusovim virijalom i koristi se u kinetičkoj teoriji plinova. Ukoliko je potencijalna energija homogena funkcija reda k

$$2\overline{T} = k\overline{U}. \tag{1.19}$$

Dva slučja koja često susrećemo

1. gravitacioni potencijal: potencijalna energija je homogena funkcija reda $k = -1$, pa slijedi $2\overline{T} = -\overline{U}$

2. harmonički potencijal: potencijalna energija je homogena funkcija reda $k = 2$, pa slijedi $\overline{T} = \overline{U}$

2 Mehanička sličnost

Neka je potencijalna energija za sistem s n čestica $U(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$, homogena funkcija koordinata reda κ, takva da je

$$U(\alpha\vec{x}_1, \ldots, \alpha\vec{x}_n) = \alpha^\kappa U(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n). \tag{2.1}$$

Napravimo li u Newtonovim jednadžbama

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

zamjenu jedinica

$$\vec{x}_i \to \vec{x}'_i = \alpha \vec{x}_i, \quad t \to t' = \beta t, \tag{2.3}$$

dolazimo do jednadžbe sljedećeg oblika

$$m_i \frac{\alpha}{\beta^2} \ddot{\vec{x}}_i = -\alpha^{\kappa-1} \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \Longrightarrow m_i \ddot{\vec{x}}_i = -\alpha^{\kappa-2} \beta^2 \frac{\partial U}{\partial \vec{x}}. \tag{2.4}$$

Ako vrijedi $\alpha^{\kappa-2}\beta^2 = 1$, tj. $\beta = \alpha^{1-\kappa/2}$, jedn. (2.4) ima isti oblik kao i jedn. (2.2). Drugim riječima, ako je $\vec{x}_i(t)$ rješenje, tada će i

$$\vec{x}'_i(t') = \alpha \vec{x}_i \left(\alpha^{1-\kappa/2} t\right), \tag{2.5}$$

biti rješenje.

Primjer: Keplerov potencijal

Keplerov potencijal je homogena funkcija reda $\kappa = -1$

$$U(\alpha\vec{r}) = -\frac{k}{\sqrt{(\alpha x)^2 + (\alpha y)^2 + (\alpha z)^2}} = -\frac{k}{\alpha\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \alpha^{-1} U(\vec{r}). \tag{2.6}$$

Slijedi $\beta = \alpha^{3/2}$, odnosno

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2}, \tag{2.7}$$

a to je upravo treći Keplerov zakon (kvadrati ophodnih vremena se odnose kao kubovi linearnih dimenzija orbite).

Primjer: potencijal harmoničkog oscilatora

Za harmonički oscilator je $U \sim x^2$ pa vrijedi $\kappa = 2$, a time i $\beta = 1$. Sve putanje imaju jednake periode, bez obzira na amplitudu oscilacija.

Primjer: homogeno gravitaciono polje

U blizini Zemlje vrijedi $U \sim z$, tako da je $\kappa = 1$, pa slijedi

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1/2}, \quad \text{tj.} \quad \frac{t'}{\sqrt{l'}} = \frac{t}{\sqrt{l}}. \tag{2.8}$$

Omjer $t/\sqrt{l}$ ne ovisi o putanji (visini slobodnog pada). Možemo zaključiti da je put proporcionalan kvadratu vremena.

3 Varijacioni postupak

3.1 Formulacija varijacionog principa

3.1.1 Osnove varijacionog postupka

Promatramo jednodimenzionalni konfiguracioni prostor $\{x\}$. Ako odaberemo dvije točke u ravnini (t, x)

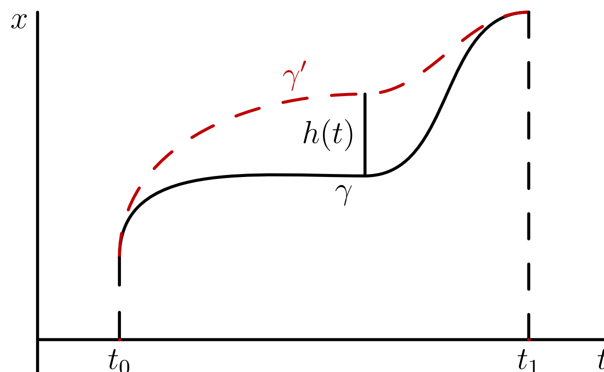
$$T_0(t_0, x_0) \quad \text{i} \quad T_1(t_1, x_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \tag{3.1}$$

možemo naći beskonačno mnogo krivulja γ koje spajaju točke T_0 i T_1. Preslikavanje s beskonačnog skupa (u ovom slučaju sve moguće krivulje) na skup realnih brojeva zovemo funkcional. Neka je funkcional $\mathcal{F}$ definiran pomoću funkcije L koja ovisi o t, x i $\dot{x}$

$$\mathcal{F}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) dt, \tag{3.2}$$

pri čemu integriramo po krivulji γ. Cilj varijacionog postupka je naći krivulju γ za koju funkcional $\mathcal{F}$ ima ekstremalnu vrijednost. Promotrimo krivulju γ' blisku krivulji γ. Krivulja γ' također pripada početnom skupu krivulja jer spaja točke T_0 i T_1. Koordinate x krivulja γ i γ' se za svaku vrijednost varijable t razlikuju za malu veličinu $h(t)$. Označimo s $x'(t)$ točku na krivulji γ', a s $x(t)$ točku na krivulji γ

$$x'(t) = x(t) + h(t) \quad \text{i} \quad \dot{x}'(t) = \dot{x}(t) + \dot{h}(t). \tag{3.3}$$



Slika 3.1: Dvije krivulje iz beskonačnog skupa krivulja koje spajaju točke t_0 i t_1.

Uz pretpostavku da je funkcija L diferencijabilna možemo je razviti u red

$$L(t, x', \dot{x}') = L(t, x, \dot{x}) + \frac{\partial L}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\dot{x}' - \dot{x}) + \cdots \tag{3.4}$$

$$L(t, x', \dot{x}') = L(t, x, \dot{x}) + \frac{\partial L}{\partial x}h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h}(t) + \cdots . \tag{3.5}$$

Funkcional $\mathcal{F}$ također možemo razviti u red

$$\mathcal{F}(\gamma') = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, x', \dot{x}'\right) dt \tag{3.6}$$

$$\mathcal{F}(\gamma') = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, x, \dot{x}\right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x}h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h}(t)\right] dt + \cdots$$

$$\mathcal{F}(\gamma') = \mathcal{F}(\gamma) + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x}h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h}(t)\right] dt + \cdots . \tag{3.7}$$

Parcijalno integriramo drugi član u uglatoj zagradi

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}h(t)\right] dt - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] h(t)dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h}(t)dt = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}h(t)\right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] h(t)dt. \tag{3.8}$$

Uočimo da su krajnje točke zajedničke za sve krivulje u skupu pa vrijedi

$$h(t_0) = 0 \quad \text{i} \quad h(t_1) = 0. \tag{3.9}$$

Razvoj funkcionala $\mathcal{F}$ poprima oblik

$$\mathcal{F}(\gamma') = \mathcal{F}(\gamma) + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) h(t)dt. \tag{3.10}$$

Razlika funkcionala za bliske putanje se svodi na

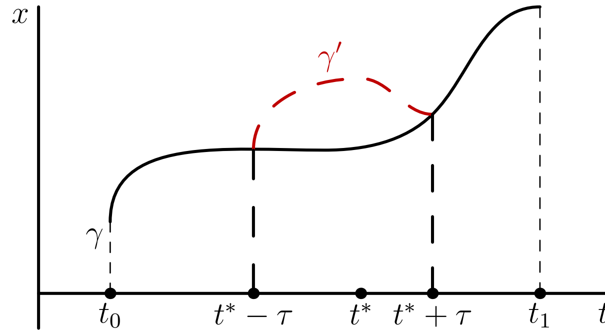
$$\delta\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}(\gamma') - \mathcal{F}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) h(t)dt. \tag{3.11}$$

Za ekstremalnu krivulju varijacija $\delta\mathcal{F}$ iščezava za svaku po volji malu varijaciju $h(t)$. Pokazat ćemo da uvjet $\delta\mathcal{F} = 0$ može biti ispunjen jedino ako vrijedi

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0. \tag{3.12}$$

Pretpostavimo suprotno, odnosno da vrijedi

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \neq 0. \tag{3.13}$$



Slika 3.2: Krivulju γ' smo konstruirali tako da je različita od nule samo na intervalu na kojem vrijedi (3.14).

Izaberemo interval $[t^* - \tau, t^* + \tau]$ oko točke $t_0 < t^* < t_1$ na kojem vrijedi

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} > 0, \tag{3.14}$$

a krivulju γ' izaberemo tako da vrijedi

$$\begin{array}{ll} h(t) > 0 & \text{za } t \in [t^* - \tau, t^* + \tau] \\ h(t) = 0 & \text{inače.} \end{array} \tag{3.15}$$

Krivulja γ' se, po konstrukciji, nalazi iznad krivulje γ pa je $h(t)$ pozitivan. Kako je i podintegralna funkcija

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} > 0, \tag{3.16}$$

po pretpostavci pozitivna, integral u formuli (3.11) nikako ne može iščezavati. Dakle, da bi uvjet ekstremalnosti bio ispunjen, mora vrijediti jedn. (3.12). Jednadžbu

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0. \tag{3.17}$$

zovemo Euler-Lagrange jednadžba za funkcional $\mathcal{F}(\gamma)$.

3.1.2 Primjer: udaljenost dvije točke u ravnini

Tražimo najkraću krivulju koja spaja dvije točke (t_0, x_0) i (t_1, x_1). Dužina krivulje u ravnini

$$F_l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(dt)^2 + (dx)^2}, \tag{3.18}$$

je preslikavanje s beskonačnog skupa krivulja na skup realnih brojeva (duljine krivulja). Dakle, $F_I(\gamma)$ predstavlja funkcional. Izraz (3.18) možemo napisati u

sljedećem obliku

$$F_l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt. \tag{3.19}$$

Funkcija $L(t, x, \dot{x})$ u ovom primjeru glasi

$$L(t, x, \dot{x}) = \sqrt{1 + \dot{x}^2}. \tag{3.20}$$

Izračunamo potrebne derivacije

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \,, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}. \tag{3.21}$$

E-L jednadžba glasi

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = 0, \tag{3.22}$$

a njezino rješenje je

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = \text{konst.} \Longrightarrow \dot{x} = \text{konst.} \tag{3.23}$$

Odatle slijedi

$$x(t) = at + b. \tag{3.24}$$

Konstante a i b određujemo iz uvjeta

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{i} \quad x(t_1) = x_1. \tag{3.25}$$

Najkraća krivulja koja spaja dvije točke u ravnini je segment pravca.

Primjer 3.1

Čestica mase m klizi po žici u vertikalnoj ravnini pod utjecajem gravitacije. Nađite jednadžbu žice tako da vrijeme potrebno čestici za put od točke O do točke A bude minimalno. Pretpostavite da se trenje može zanemariti.

Pretpostavljamo da čestica miruje u početnoj točki $y = y_0$. Zakon sačuvanja energije kaže da je suma kinetičke i potencijalne energije u početnoj i konačnoj točki jednaka

$$mgy_0 + 0 = mg(y_0 - y) + \frac{1}{2}mv^2. \tag{3.26}$$

Brzina čestice

$$v = \frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{2gy}. \tag{3.27}$$

Put raste s vremenom pa biramo pozitivan predznak

$$\Longrightarrow dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}. \tag{3.28}$$

Diferencijal puta

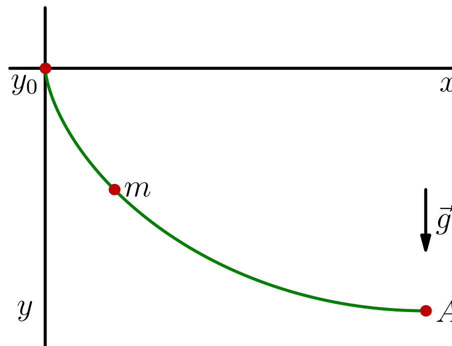
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \Longrightarrow dt = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{\sqrt{2gy}}. \tag{3.29}$$

Izvadimo dx izvan korijena

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2gy}}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{3.30}$$

Nadalje koristimo oznaku

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{dx}. \tag{3.31}$$



Vrijeme potrebno čestici za put od točke O do točke A

$$\tau = \int_0^A dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_A} \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}} dx. \tag{3.32}$$

Vrijeme τ je funkcional jer se radi o preslikavanju sa skupa svih mogućih putanja $y(x)$ na skup realnih brojeva (vrijeme potrebno da čestica spusti po žici). Funkcional τ ima minimum ako funkcija F

$$F(x, y, \dot{y}) = \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}}, \tag{3.33}$$

zadovoljava Euler-Lagrange jednadžbu

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{3.34}$$

Derivacije potrebne za E-L jednadžbu

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{y}\sqrt{1+\dot{y}^2}} \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{y^{3/2}}. \tag{3.35}$$

Deriviramo prvi član

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{y}\sqrt{1+\dot{y}^2}} - \frac{2\dot{y}^2\ddot{y}}{2\sqrt{y}(1+\dot{y}^2)^{3/2}} \tag{3.36}$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\dot{y}^2}{y^{3/2}\sqrt{1+\dot{y}^2}} \tag{3.37}$$

$$= \frac{\ddot{y}}{\sqrt{y}(1+\dot{y}^2)^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{\dot{y}^2}{y^{3/2}\sqrt{1+\dot{y}^2}}. \tag{3.38}$$

Euler-Lagrange jednadžba

$$\frac{\ddot{y}}{\sqrt{y}(1+\dot{y}^2)^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{\dot{y}^2}{y^{3/2}\sqrt{1+\dot{y}^2}} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{y^{3/2}} = 0. \tag{3.39}$$

Pomnožimo E-L jednadžbu (3.39) s faktorom

$$y^{3/2}\left(1+\dot{y}^2\right)^{3/2}. \tag{3.40}$$

Jednadžba (3.39) svodi se na

$$y\ddot{y} - \frac{1}{2}\left(1+\dot{y}^2\right)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}(1+\dot{y}^2)^2 = 0 \tag{3.41}$$

$$2y\ddot{y} + \left(1+\dot{y}^2\right)\left[1+\dot{y}^2-\dot{y}^2\right] = 0. \tag{3.42}$$

Tražena diferencijalna jednadžba žice

$$1 + \dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = 0, \tag{3.43}$$

ne ovisi eksplicitno o x pa možemo iskoristiti metodu snižavanja reda jednadžbe

$$u \equiv \dot{y} \Longrightarrow \ddot{y} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}. \tag{3.44}$$

Jednadžbu žice sveli smo na diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$1 + u^2 + 2yu\frac{du}{dy} = 0, \tag{3.45}$$

koju možemo riješiti separcijom varijabli

$$\frac{2udu}{1+u^2} = -\frac{dy}{y} \Longrightarrow \ln\left(1+u^2\right) = -\ln y + \ln b. \tag{3.46}$$

Pritom smo konstantu integracije označili s b. Malo preuredimo jedn. (3.46)

$$\ln\frac{(1+u^2)y}{b} = 0 \Longrightarrow \frac{(1+u^2)y}{b} = 1 \Longrightarrow u = \sqrt{\frac{b-y}{y}} \tag{3.47}$$

Vraćamo se na varijablu $u = dy/dx$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{b-y}{y}}. \tag{3.48}$$

Separiramo varijable u prethodnoj jednadžbi

$$\sqrt{\frac{y}{b-y}}dy = dx. \tag{3.49}$$

Koristimo trigonometrijsku supstituciju

$$y = b\sin^2\theta \Longrightarrow dy = 2b\sin\theta\cos\theta. \tag{3.50}$$

Diferencijalna jednadžba (3.49) svodi se na

$$\sqrt{\frac{b\sin^2\theta}{b\left(1-\sin^2\theta\right)}}2b\sin\theta\cos\theta d\theta = dx, \tag{3.51}$$

$$\Longrightarrow 2b\sin^2\theta d\theta = dx. \tag{3.52}$$

Integriramo gornju jednadžbu

$$x = 2b \int \sin^2 \theta d\theta + C, \tag{3.53}$$

pri čemu je C konstanta integracije. Da bi riješili gornji integral, koristimo trigonometrijsku relaciju

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} \left(1 - \cos 2\theta\right), \tag{3.54}$$

$$\Longrightarrow x = b \int \left(1 - \cos 2\theta\right) d\theta + C \tag{3.55}$$

$$= \frac{b}{2} \left(2\theta - \sin 2\theta\right) + C. \tag{3.56}$$

Uvjet da žica prolazi kroz točku $O(x = 0, y = 0)$ fiksira konstantu integracije C

$$y = 0 \Longrightarrow \theta = 0 \quad \text{i} \quad x = 0 \Longrightarrow C = 0. \tag{3.57}$$

Koristimo oznake: $\phi = 2\theta$ i $b = 2a$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c} x = a(\phi - \sin \phi) \\ y = a(1 - \cos \phi) \end{array}, \tag{3.58}$$

i dolazimo do parametarske jednadžbe cikloide. Uvjet da žica prolazi kroz točku A fiksira konstantu integracije b.

3.1.3 Višedimenzionalni konfiguracioni prostor

Postupak određivanja ekstremalne krivulje možemo generalizirati na konfiguracioni prostor bilo koje dimenzije. Zadajemo funkcional

$$\mathcal{F}(\{\vec{q}(t)\}) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) dt, \tag{3.59}$$

gdje je $\vec{q}(t)$ bilo koja trajektorija u konfiguracionom prostoru s krajnjim točkama $\vec{q}(t_0)$ i $\vec{q}(t_1)$. Opet promatramo krivulju γ i po volji blisku krivulju γ' koja se razlikuje od početne krivulje za mali iznos h

$$q_i^{\gamma'}(t) = q_i^{\gamma}(t) + h_i(t). \tag{3.60}$$

Taylorov razvoj funkcije $L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})$ glasi

$$\begin{aligned} L(t, \vec{q} + \vec{h}, \dot{\vec{q}} + \dot{\vec{h}}) = L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) \\ + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} h_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Varijacija funkcionala (3.59)

$$\delta \mathcal{F} = \mathcal{F}(\vec{q} + \vec{h}) - \mathcal{F}(\vec{q}). \tag{3.62}$$

Uvrstimo razvoj (3.61) u varijaciju funkcionala (3.62)

$$\delta \mathcal{F} = \sum_i \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} h_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i \right] dt, \tag{3.63}$$

a zatim parcijalno integriramo

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h_i \right] dt - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] h_i dt, \tag{3.64}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h_i \bigg|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] h_i dt. \tag{3.65}$$

Sve krivulje u konfiguracijskom prostoru imaju zajedničke krajnje točke pa vrijedi

$$\Longrightarrow h_i(t_0) = h_i(t_1) = 0. \tag{3.66}$$

Od varijacije funkcionala preostaje

$$\delta \mathcal{F} = \sum_i \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] h_i dt. \tag{3.67}$$

Kao i u slučaju jednodimenzionalnog konfiguracijskog prostora uvjet ekstremalne putanje

$$\delta\mathcal{F} = 0, \tag{3.68}$$

je ispunjen ako i samo ako su ispunjene Euler-Lagrange jednadžbe

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \ , \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.69}$$

E-L jednadžbe možemo napisati skupno

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = 0. \tag{3.70}$$

Trajektorija koja zadovoljava jedn. (3.70) ekstremalizira funkcional $\mathcal{F}$, a da bi saznali da li je u pitanju minimum ili maksimum potencijala morali bi tražiti doprinose drugog reda u varijaciji funkcionala $\mathcal{F}$ po $\vec{h}$.

4 Hamiltonov princip

Postavlja se pitanje da li postoji funkcional za koji su pripadne Euler-Lagrange jednadžbe ekvivalentne Newtonovim jednadžbama? Odgovor je potvrdan. Za konzervativni sustav uvodimo Lagrangeovu funkciju (Lagrangian)

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = T(\dot{\vec{x}}) - U(\vec{x}), \tag{4.1}$$

i pripadni funkcional djelovanja

$$S(\{\vec{x}\}) = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) dt. \tag{4.2}$$

Hamiltonov princip ekstremalnog djelovanja : gibanja mehaničkog određena su ekstremalnim putanjama funkcionala S. Provjerimo da li E-L jednadžbe za funkcional (4.2) odgovaraju Newtonovim jednadžbama. Iz Lagrangeova funkcije

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{x}})^2 - U(\vec{x}), \tag{4.3}$$

izračunamo derivacije potrebne za E-L jednadžbu

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{x}}_i} = m_i \dot{\vec{x}}_i \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i}. \tag{4.5}$$

Euler-Lagrange jednadžbe

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \Longrightarrow m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i} = 0, \tag{4.6}$$

vode upravo na Newtonove jednadžbe

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i} \equiv \vec{F}_i. \tag{4.7}$$

Ako kao generalizirane koordinate odaberemo vektore položaja čestica , E-L jednadžbe za funkcional djelovanja se poklapaju s Newtonovim jednadžbama. Možemo zaključiti da su Hamiltonov princip i Newtonov determinizam su ekvivalentni. Hamiltonov princip i pripadne E-L jednadžbe vrijede za bilo koji izbor generaliziranih koordinata. Pritom koristimo sljedeću notaciju

- generalizirane koordinate: q_i
- generalizirane brzine: $\dot{q}_i$
- generalizirani impulsi: $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$
- generalizirane sile: $F_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q_i}$

E-L jednadžbe za funkcional djelovanja (generalizirane Newtonove jednadžbe) nazivamo Lagrangeovim jednadžbama. Funkcional djelovanja za trajektoriju koja zadovoljava Lagrangeove jednadžbe ima ekstrem, ali ne nužno minimum

4.1 Primjena Hamiltonovog principa: slobodna čestica

Promatramo slučaj slobodne čestice. Sustav ima tri stupnja slobode, a potencijal iščezava jer je čestica slobodna. Pripadna Lagrangeova funkcija jednaka je kinetičkoj energiji

$$L = T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2. \tag{4.8}$$

4.1.1 Kartezijev sustav

Vektor položaja čestice u Kartezijevom sustavu dan je izrazom

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{4.9}$$

a vektor brzine

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \tag{4.10}$$

Lagrangian slobodne čestice u Kartezijevom sustavu glasi

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right). \tag{4.11}$$

Lagrangeove jednadžbe

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Longrightarrow m\ddot{x} = 0, \tag{4.12}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \Longrightarrow m\ddot{y} = 0, \tag{4.13}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0 \Longrightarrow m\ddot{z} = 0, \tag{4.14}$$

možemo jednostavno riješiti

$$x = a_x t + b_x, \tag{4.15}$$

$$y = a_y t + b_y, \tag{4.16}$$

$$z = a_z t + b_z. \tag{4.17}$$

Rješenje dgovara parametarskoj jednadžbi pravca u prostoru. Slobodna čestica se giba po najkraćoj spojnici između dvije točke (pravac).

4.1.2 Cilindrični sustav

Da bi napisali kinetičku energiju u cilindričnom sustavu prisjetimo se izraza za brzinu čestice u cilindričnim koordinatama

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{\rho}_0 + \rho\dot{\phi}\vec{\phi}_0 + \dot{z}\vec{k}. \tag{4.18}$$

Kvadriramo brzinu i odmah možemo napisati Lagrangian slobodne čestice u cilindričnim koordinatama

$$L = \frac{m}{2}\left[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right]. \tag{4.19}$$

Lagrangeove jednadžbe u ovom problemu glase

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \Longrightarrow m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 = 0, \tag{4.20}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot{\phi}\right) = 0, \tag{4.21}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Longrightarrow \ddot{z} = 0. \tag{4.22}$$

Rješavajući jednadžbe gibanja dobili bi pravac u cilindričnom koordinatama.

4.1.3 Prostorni polarni sustav (sferni sustav)

Izraz za brzinu čestice u sfernim koordinatama glasi

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{\phi}_0. \tag{4.23}$$

Kvadriramo brzinu i možemo napisati Lagrangian slobodne čestice u sfernim koordinatama

$$L = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right]. \tag{4.24}$$

Lagrangeove jednadžbe glase

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Longrightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\sin^2\theta\dot{\phi}^2 = 0, \tag{4.25}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) - mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0, \tag{4.26}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right) = 0. \tag{4.27}$$

4.1.4 Općenite koordinate

Pretpostavimo da je zadan skup od m generaliziranih koordinata $\{q_i\}$, kao i da te koordinate možemo povezati s Kartezijevim koordinatama sustava n čestica

$$x_i = f_{xi}(q_1,\ldots,q_m), \quad y_i = f_{yi}(q_1,\ldots,q_m), \quad z_i = f_{zi}(q_1,\ldots,q_m), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{4.28}$$

Deriviramo koordinate x_i, y_i i z_i koristeći pravilo lančanog deriviranja

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f_{xi}}{\partial q_k}\dot{q}_k, \quad \dot{y}_i = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f_{yi}}{\partial q_k}\dot{q}_k, \quad \dot{z}_i = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f_{zi}}{\partial q_k}\dot{q}_k, \tag{4.29}$$

a zatim izračunamo kinetičku energiju sustava čestica

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right), \tag{4.30}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\sum_{kl=1}^{m}\left(\frac{\partial f_{xi}}{\partial q_k}\frac{\partial f_{xi}}{\partial q_l} + \frac{\partial f_{yi}}{\partial q_k}\frac{\partial f_{yi}}{\partial q_l} + \frac{\partial f_{zi}}{\partial q_k}\frac{\partial f_{zi}}{\partial q_l}\right)\dot{q}_k\dot{q}_l\right]. \tag{4.31}$$

Promjenimo poredak sumacija

$$T = \frac{1}{2}\sum_{kl=1}^{m}\dot{q}_k\dot{q}_l\left[\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{\partial f_{xi}}{\partial q_k}\frac{\partial f_{xi}}{\partial q_j} + \frac{\partial f_{yi}}{\partial q_k}\frac{\partial f_{yi}}{\partial q_j} + \frac{\partial f_{zi}}{\partial q_k}\frac{\partial f_{zi}}{\partial q_j}\right)\right], \tag{4.32}$$

a zatim izraz u uglatoj zagradi proglasimo koeficijentom a_{kj}

$$a_{kl}(q_1,\ldots,q_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{\partial f_{xi}}{\partial q_k}\frac{\partial f_{xi}}{\partial q_l} + \frac{\partial f_{yi}}{\partial q_k}\frac{\partial f_{yi}}{\partial q_l} + \frac{\partial f_{zi}}{\partial q_k}\frac{\partial f_{zi}}{\partial q_l}\right). \tag{4.33}$$

Za bilo koji izbor generaliziranih koordinata kinetička energija ostaje kvadratična funkcija generaliziranih brzina, ali općenito ovisi i o koordinatama. Takve primjere smo vidjeli na primjeru cilindričnih i sfernih koordinata.

4.2 Primjena Hamiltonovog principa: geodezijske krivulje

4.2.1 Slobodna čestica u prostoru

Ovaj slučaj smo već riješili u odjeljku 4.1.1. Najkraća spojnica između dvije točke u prostoru je pravac.

4.2.2 Slobodna čestica na sferi

Giba li se čestica po sferi radijusa R, njezina udaljenost od ishodišta je konstantna pa se Lagrangian (4.24) svodi na

$$L = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right). \tag{4.34}$$

Koordinata ϕ je ciklička pa je pripadni generalizirani impuls konstanta gibanja

$$p_\phi = mR^2\sin^2\theta\dot{\phi} = \text{konst.} \tag{4.35}$$

To zapravo znači da je sljedeći produkt konstantan

$$p_\phi = \sin^2\theta\dot{\phi} = \text{konst.} \tag{4.36}$$

Koordinatni sustav uvijek možemo orjentirati tako da je početni položaj $\theta_0 = 0$. Tada cijelo vrijeme vrijedi $p_\phi = 0$. Stoga, kada čestica izađe iz pola ($\theta_0 = 0$) mora biti $\dot{\phi} = 0$ tj. $\phi =$ konst. Čestica se giba po meridijanu, odnosno po kružnici koja spaja krajnje točke i ima središte u ishodištu.

4.2.3 Slobodna čestica na cilindru

Ako se čestica giba po cilindru radijusa R, od Lagrangiana (4.19) preostaje

$$L = \frac{m}{2}\left[R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right]. \tag{4.37}$$

Koordinata ϕ je ciklička pa je pripadni generalizirani impuls konstanta gibanja

$$p_\phi = mR^2\dot{\phi}, \tag{4.38}$$

odnosno brzina $\dot{\phi}$ je konstanta

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mR^2} \Longrightarrow \phi(t) = \frac{p_\phi}{mR^2}t + \phi_0. \tag{4.39}$$

Lagrangeova jednadžba za koordinatu z glasi

$$m\ddot{z} = 0 \Longrightarrow z(t) = v_z t + z_0. \tag{4.40}$$

Dobili smo parametarsku jednadžbu zavojnice na cilindru

$$\phi(t) = At + B \quad \text{i} \quad z(t) = Ct + D. \tag{4.41}$$

4.3 Primjena Hamiltonovog principa: čestica u centralnom polju

Želimo opisati gibanje čestice mase m u polju centralne sile koristeći samo Lagrangeov formalizam. Potencijal ovisi samo o udaljenosti od centra sile pa koristimo sferni koordinatni sustav s ishodištem u centru sile. Brzina čestice u sfernom sustavu glasi

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{\phi}_0. \tag{4.42}$$

Lagrangian čestice je razlika kinetičke i potencijalne energije

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) - U(r). \tag{4.43}$$

Izračunamo generalizirane impulse

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \tag{4.44}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \tag{4.45}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\sin\theta\dot{\phi}. \tag{4.46}$$

Lagrangeove jednadžbe

$$\dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2\theta\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}, \tag{4.47}$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2, \tag{4.48}$$

$$\dot{p}_\phi = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0. \tag{4.49}$$

Lagrangian ne ovisi o koordinati ϕ pa je generalizirani impuls p_ϕ konstanta gibanja (ϕ je ciklička koordinata). Da bi došli do fizikalnog značenja konstante gibanja p_ϕ promotrimo izraz za zakretni impuls u sfernim koordinatama

$$\vec{M} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times \left(\dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{\phi}_0\right) = mr^2\dot{\theta}\vec{\phi}_0 - mr^2\sin\theta\dot{\phi}\vec{\theta}_0. \quad (4.50)$$

Koristeći izraze

$$\vec{\phi}_0 = -\sin\phi\vec{i} + \cos\phi\vec{j}, \quad (4.51)$$

$$\vec{\theta}_0 = \cos\theta\cos\phi\vec{i} + \cos\theta\sin\phi\vec{j} - \sin\theta\vec{k}, \quad (4.52)$$

možemo izvesti Kartezijeve komponente zakretnog impulsa u sfernim koordinatama

$$M_x = -mr^2\left(\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\theta\cos\phi\right), \quad (4.53)$$

$$M_y = mr^2\left(\dot{\theta}\cos\phi - \dot{\phi}\sin\theta\cos\theta\sin\phi\right), \quad (4.54)$$

$$M_z = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}. \quad (4.55)$$

Usporedbom s izrazom (4.46) dolazimo do zaključka da je generalizirani impuls p_ϕ ekvivalentan z komponenti zakretnog impulsa. Koristeći samo Lagrangeov formalizam došli smo do zaključka da je z komponenta zakretnog impulsa čestice koja se giba u polju centralne sile konstanta gibanja. U drugu Lagrangeovu jednadžbu

$$\dot{p}_\theta = mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2, \quad (4.56)$$

uvrstimo $\dot{\phi}$

$$p_\phi = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} \Longrightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta} \Longrightarrow \dot{p}_\theta = \frac{\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}p_\phi^2. \quad (4.57)$$

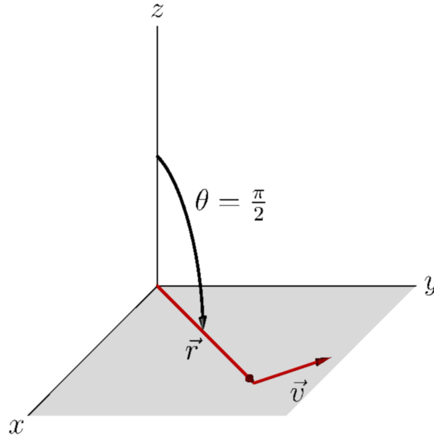
Pomnožimo jedn. (4.57) s p_θ

$$p_\theta\dot{p}_\theta = \frac{\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}p_\phi^2 mr^2\dot{\theta} \Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{dp_\theta^2}{dt} = \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\dot{\theta}p_\phi^2 = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}. \quad (4.58)$$

Prethodna jednadžba se svodi na još jedan zakon sačuvanja

$$\frac{d}{dt}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\right) = 0 \Longrightarrow p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} = M^2 = \text{konst.} \quad (4.59)$$

Jedn. (4.59) odgovara sačuvanju iznosa kutne količine gibanja. Dakle, prve dvije Lagrangeove jednadžbe vode na



Slika 4.1: Vektor položaja i brzina čestice nalaze se u ravnini xy.

- sačuvanje z komponente zakretnog impulsa
- sačuvanje iznosa zakretnog impulsa

Izaberimo jednu točku putanje $\vec{r}$ s brzinom $\vec{v}$ Koordinatni sustav uvijek možemo orjentirati tako da se promatrana točka putanje i brzina u toj točki nalaze u xy-ravnini ($\theta = \dfrac{\pi}{2}$). Budući da su M^2 i M_z konstante gibanja, razlika $M^2 - M_z^2$ je također konstanta gibanja. Prethodni izraz možemo izračunati u točki $\vec{r}$

$$M^2 - M_z^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} - p_\phi^2 = m^2 r^4 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m^2 r^4 \sin^2(2\theta)\dot{\phi}^2. \tag{4.60}$$

Vektor $\vec{r}$ se nalazi u xy ravnini ($\theta = \pi/2$), a brzina $\vec{v}$ se nalazi u xy ravnini ($\dot{\theta} = 0$)

$$M^2 - M_z^2 = m^2 r^4 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m^2 r^4 \sin^2(2\theta)\dot{\phi}^2 = 0. \tag{4.61}$$

$M^2 - M_z^2$ je konstanta gibanja pa uvjet (4.61) mora vrijediti za cijelu putanju. Primjetimo da se radi o sumi dva pozitivna doprinosa. Da bi takva suma bila jednaka nuli, svaki pojedini doprinos mora biti jednak nuli

$$r^4 \dot{\theta}^2 = 0 \Longrightarrow \dot{\theta} = 0 \tag{4.62}$$

$$r^4 \sin^2(2\theta)\dot{\phi}^2 = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}. \tag{4.63}$$

Zaključili smo da za cijelu putanju vrijedi

$$\dot{\theta} = 0 \quad \text{i} \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \tag{4.64}$$

odnosno da se cijela putanja nalazi u xy ravnini. Kako vrijedi $M^2 - M_z^2 = 0$, slijedi da je vektor zakretnog impulsa $\vec{M}$ okomit na ravninu gibanja. Zadnja Lagrangeova jednadžba glasi

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2\theta\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}. \tag{4.65}$$

Uvrstimo uvjete $\theta = \pi/2$ i $\dot{\theta} = 0$

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}. \tag{4.66}$$

Iskoristimo sačuvanje zakretnog impulsa

$$mr^2\dot{\phi} = p_\phi = M \Longrightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{M^2}{m^2r^4}. \tag{4.67}$$

Uvrstimo prethodni rezultat u jedn. (4.66)

$$m\ddot{r} = \frac{M^2}{mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r}. \tag{4.68}$$

Došli smo do jednadžbe gibanja koju smo već izveli iz Newtonovih jednadžbi, a pritom smo reproducirali sve zaključke vezane uz zakretni impuls kao konstantu gibanja.

4.3.1 Zakon sačuvanja energije

Analizom Newtonovih jednadžbi gibanja došli smo do zaključka da je u konzervativnom sustavu ukupna energija sačuvana. Isti rezultat slijedi iz Lagrangeove formulacije mehanike. Radi homogenosti vremena, za konzervativni sustav Lagrangian ne ovisi eksplicitno o vremenu

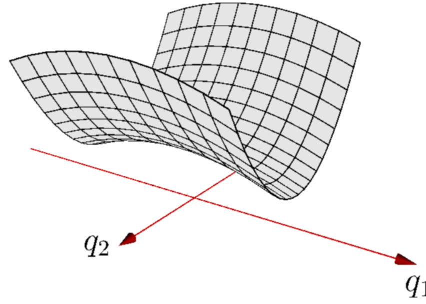
$$L = \frac{1}{2}\sum_{ik} a_{ik}(q_1,\ldots,q_n)\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q_1,\ldots,q_n), \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \tag{4.69}$$

Deriviramo li Lagrangian po vremenu

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i. \tag{4.70}$$

Uvrstimo Lagrangeove jednadžbe gibanja

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right] = \frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i. \tag{4.71}$$



Slika 4.2: Efektivni potencijal koji strmo raste u smjeru okomitiom na generalizirani koordinatu q_1.

Sada slijedi

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0. \tag{4.72}$$

Pretpostavljamo da potencijal ne ovisi o brzinama

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i. \tag{4.73}$$

Kinetička energija je homogena funkcija poopćenih brzina drugog reda pa možemo primjeniti Eulerov teorem

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T. \tag{4.74}$$

Stoga od relacije (4.72) preostaje

$$\frac{d}{dt}(2T - L) = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}(2T - T + U) = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}(T + U) = 0, \tag{4.75}$$

čime smo reproducirali zakon sačuvanja energije.

4.4 Veze i efektivni potencijali

Pretpostavimo da se čestica nalazi u potencijalu koji je strm u smjeru okomitom na neku zadanu krivulju. U slučaju na sl. 4.2 q_1 je generalizirana koordinata duž krivulje, a q_2 je generalizirana koordinata okomita na krivulju . Ukupni potencijal možemo napisati kao sumu dva doprinosa

$$U_{tot} = U(q_1, q_2) + \kappa q_2^2, \tag{4.76}$$

pri čemu drugi član u sumi daje strmi dio potencijala okomit na generaliziranu koordinatu q_1. Lagrangian ovakvog sustava glasi

$$L = T(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) - U_{tot}(q_1, q_2). \quad (4.77)$$

U granici beskonačno strmog potencijala ($\kappa \to \infty$) čestica konačne energije ne može dospjeti izvan krivulje $q_2 = 0$. Tada rješenje Lagrangeove jednadžbe za koordinatu q_2 glasi

$$q_2 = 0 \quad \text{i} \quad \dot{q}_2 = 0. \quad (4.78)$$

Uvrstimo rješenje (4.78) u Lagrangian (4.77)

$$L^* = T(q_1, \dot{q}_1, q_2 = \dot{q}_2 = 0) - U(q_1, q_2 = 0). \quad (4.79)$$

Ovim postupkom uveli smo vezu $q_2 = 0$ koju mora zadovoljavati putanja. Pri generalizaciji za slučaj konfiguracionog prostora dimenzije $3n$ promatramo mnogostrukost karakteriziranu koordinatama $\vec{q}_1$ i koordinate $\vec{q}_2$ okomite na nju. Ukupna potencijalna energija glasi

$$U_{tot} = U(\vec{q}_1) + \kappa \vec{q}_2^{\,2}, \quad (4.80)$$

a u granici $\kappa \to \infty$ gibanje je ograničeno na mnogostrukost deifniranu uvjetom $\vec{q}_2 = 0$. Lagrangian smo sveli na oblik

$$L^* = T(\vec{q}_2 = \dot{\vec{q}}_2 = 0) - U(\vec{q}_1, \vec{q}_2 = 0). \quad (4.81)$$

4.5 Tipovi veza

4.5.1 Holonomne veze

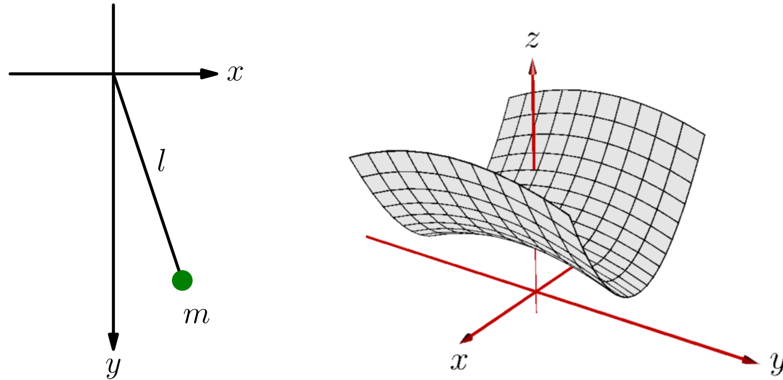
Pretpostavimo da se u konfiguracionom prostoru dimenzije $3n$ sustav zbog ograničenja može gibati samo po plohi dimenzije m. Od početnih $3n$ koordinata samo je m nezavisnih tj. ploha je definirana s $3n - m$ jednadžbi

$$f_1(\vec{r}) = 0, \ldots, f_{3n-m}(\vec{r}) = 0. \quad (4.82)$$

Veze koje možemo izraziti na ovaj način nazivamo holonomnim.

Primjer 1: njihalo u ravnini

Početni konfiguracioni prostor ima dimenziju 2, a možemo ga definirati kartezijevim koordinatama x i y. Čestica zapravo ima samo jedan nezavisan stupanj



Slika 4.3: Lijevo: njihalo u ravnini ima samo jedan nezavisan stupanj slobode. Desno: Čestica na plohi ima dva stupnja slobode.

slobode jer njihalo ima dužinu l. Koordinate x i y nisu nezavisne, već su vezane duljinom njihala

$$x^2 + y^2 = l^2 \tag{4.83}$$

Funkcija veze $f_1(\vec{r})$ za ovaj problem glasi

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0. \tag{4.84}$$

Primjer 2: gibanje na plohi

Neka je ploha zadana jednadžbom

$$z = g(x, y). \tag{4.85}$$

Početni konfiguracioni prostor ima dimenziju 3 i možemo ga definirati koordinatama x, y i z, dok u stvarnosti čestica ima samo dva nezavisna stupnja slobode jer je ograničena na gibanje po plohi. Funkcija veze $f_1(\vec{r})$ za ovaj problem glasi

$$f_1(x, y, z) = z - g(x, y) = 0. \tag{4.86}$$

Primjer 3: kruto tijelo

Udaljenosti među česticama u krutom tijelu su fiksirane

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = c_{ij}^2. \tag{4.87}$$

Npr. u krutom tijelu sastavljenom od 3 čestice postoje 3 nezavisna ograničenja

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_1)^2 = c_{12}^2 \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2 = c_{13}^2 \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^2 = c_{23}^2. \tag{4.88}$$

Od početnog konfiguracionog prostora dimenzije 9 došli smo do prostora dimenzije 6. Svako kruto tijelo ima samo 6 stupnjeva slobode, bez obzira na to od koliko čestica se sastoji.

4.5.2 Neholonomne veze

Ako ne možemo eliminirati neku od koordinata i prijeći na reducirani broj generaliziranih koordinata za vezu kažemo da je neholonomna. Prvi tip neholonomnih veza koje često susrećemo je gibanje u dijelu prostora.

Primjer 1: plin u kutiji

Možemo samo postaviti ograničenje na dio prostora u kojem se čestice plina mogu naću, ali ne možemo eliminirati ni jednu koordinatu

$$0 \leq x_i \leq L_x, \tag{4.89}$$

$$0 \leq y_i \leq L_y, \tag{4.90}$$

$$0 \leq z_i \leq L_z. \tag{4.91}$$

Primjer 2: gibanje blizu površine Zemlje

Možemo samo reći da je udaljenost čestice od središta Zemlje veće od radijusa Zemlje

$$r \geq R_z, \tag{4.92}$$

ali ni u ovakvoj situaciji ne možemo eliminirati ni jednu koordinatu.

Primjer 3: veze među brzinama

Drugi česti tip neholonomnih veza su one koje vežu brzine pojedinih stupnjeva slobode (npr. kotrljanje na hrapavoj površini koje sprječava klizanje). Jednadžbe gibanja tada najčešće imaju oblik

$$\sum_i \lambda_{q_i} \dot{q}_i = 0, \tag{4.93}$$

pa ih ne možemo integrirati dok ne nađemo putanju.

4.5.3 Reonomne i skleronomne veze

Veze koje ovise o vremenu nazivamo reonomne, dok veze koje ne ovise o vremenu nazivamo skleronomne. Holonomne i neholonomne veze mogu biti reonomne ili skleronomne.

Primjer 4.1

Čestica mase m kliže bez trenja po žici oblika cikloide u homogenom gravitacijskom polju. Izvedite Lagrangian i jednadžbu gibanja. Pokažite da se uz supstituciju $u = \cos\frac{\theta}{2}$ jednadžba gibanja može napisati u obliku

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{4a}u = 0 \,, \tag{4.94}$$

i nađite period oscilacije čestice.

Jednadžba cikloide

$$x = a\left(\theta - \sin\theta\right) \quad \text{i} \quad y = a\left(1 + \cos\theta\right), \tag{4.95}$$

pri čemu je θ parametar za koji vrijedi $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Čestica na žici ima jedan nezavisan stupanj slobode, a kao generaliziranu koordinatu možemo izabrati upravo parametar θ. Komponente brzine čestice

$$\dot{x} = a\dot{\theta} - a\cos\theta\dot{\theta}, \tag{4.96}$$

$$\dot{y} = -a\sin\theta\dot{\theta}. \tag{4.97}$$

Kvadriramo komponente brzine

$$\dot{x}^2 = a^2\dot{\theta}^2 - 2a^2\cos\theta\dot{\theta}^2 + a^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2, \tag{4.98}$$

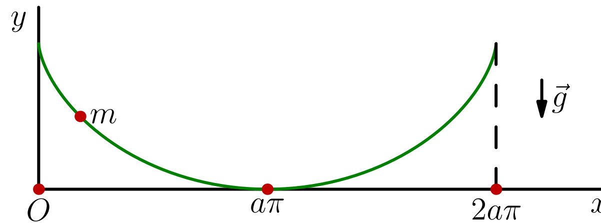
$$\dot{y}^2 = a^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2, \tag{4.99}$$

da bi došli do kinetičke energije čestice

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = ma^2\dot{\theta}^2\left(1 - \cos\theta\right). \tag{4.100}$$

Čestica se giba u homogenom gravitacijskom polju pa je potencijalna energija čestice

$$U = mgy = mga\left(1 + \cos\theta\right). \tag{4.101}$$



Slika 4.4: Čestica se giba po žici oblika cikloide.

Lagrangian čestice je razlika kinetičke i potencijalne energije

$$L = T - U = ma^2 (1 - \cos\theta)\,\dot{\theta}^2 - mga\,(1 + \cos\theta)\,. \tag{4.102}$$

Euler-Lagrange jednažba

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \tag{4.103}$$

Izračunamo potrebne derivacije

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2ma^2 (1 - cos\theta)\,\dot{\theta} \tag{4.104}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2ma^2 (1 - cos\theta)\,\ddot{\theta} + 2ma^2 \sin\theta\dot{\theta}^2 \tag{4.105}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ma^2 \sin\theta\dot{\theta}^2 + mga\sin\theta. \tag{4.106}$$

Jednadžbu gibanja

$$(1 - \cos\theta)\,\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 - \frac{g}{2a}\sin\theta = 0, \tag{4.107}$$

podijelimo s faktorom

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{4.108}$$

Drugi član u jednadžbi gibanja

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2. \tag{4.109}$$

Treći član u jednadžbi gibanja

$$\frac{g}{a}\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{g}{2a}\cot\frac{\theta}{2}. \tag{4.110}$$

Jednadžbu gibanja

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{2a}\cot\frac{\theta}{2} = 0 \tag{4.111}$$

možemo nadalje pojednostaviti koristeći supstituciju $u = \cos\dfrac{\theta}{2}$

$$\ddot{u} + \frac{g}{4a}u = 0. \tag{4.112}$$

Dobili smo jednadžbu harmoničkog oscilatora s kružnom frekvencijom $\omega^2 = \dfrac{g}{4a}$. Odmah možemo izračunati i period gibanja čestice

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}. \tag{4.113}$$

Primjer 4.2

Čestica mase m giba se po glatkoj žici savijenoj u obliku zavojnice

$$\rho = az, \quad \phi = -bz.$$

Nađite Lagrangian, jednadžbu gibanja i konstantu gibanja.

Čestica ima samo jedan stupanj slobode. Kao nezavisnu generaliziranu koordinatu odaberemo varijablu z cilindričnog koordinatnog sustava, dok koordinate ρ i ϕ eliminiramo koristeći uvjete

$$\rho = az \quad \text{i} \quad \phi = -bz. \tag{4.114}$$

Uzimajući u obzir ograničenja, dolazimo do sljedećeg izraza za brzinu čestice

$$\dot{\vec{r}} = a\dot{z}\vec{\rho}_0 - abz\dot{z}\vec{\phi}_0 + \dot{z}\vec{k}. \tag{4.115}$$

Kinetička energija čestice glasi

$$T = \frac{m}{2}\left(a^2 + a^2b^2z^2 + 1\right)\dot{z}^2, \tag{4.116}$$

dok je potencijalna energija $U = mgz$. Lagrangian čestice odgovara razlici kinetičke i potencijalne energije

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(a^2 + a^2b^2z^2 + 1\right)\dot{z}^2 - mgz. \tag{4.117}$$

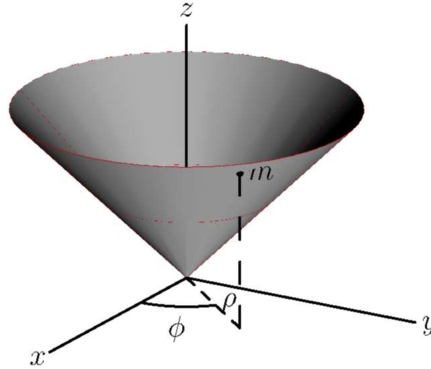
Euler-Lagrange jednadžba glasi

$$\left(a^2 + 1 + a^2b^2z^2\right)\ddot{z} + a^2b^2\dot{z}^2z = -g. \tag{4.118}$$

Lagrangian ne ovisi eksplicitno o vremenu pa je veličina C sačuvana

$$C = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{z} - L = \frac{m}{2}\left(a^2 + a^2b^2z^2 + 1\right)\dot{z}^2 + mgz, \tag{4.119}$$

i odgovara mehaničkoj energiji čestice $E = T + U$ jer je kinetička energija homogena funkcije drugog reda od generalizirane brzine (ograničenje na gibanje je skleronomno).



Slika 4.5: Čestica se giba po unutrašnjosti stošca. Vrh stošca smješten je u ishodištu koordinatnog sustava.

Primjer 4.3

Čestica se giba u homogenom gravitacijskom polju po plaštu naopako okrenutog stošcu kuta otvora 2α. Izvedite Lagrangian i Euler-Lagrangeove jednadžbe koristeći sferni koordinatni sustav. Nađite konstante gibanje. Pokažite da problem možemo svesti na gibanje čestice u efektivnom jednodimenzionalnom potencijalu, izvedite izraz za efektivni potencijal i nađite položaj ravnoteže. Pod kojim uvjetom će čestica kružiti po stošcu bez promjene visine?

Čestica je ograničena na gibanje po stošcu pa se kut θ sfernog koordinatnog sustava ne mijenja $\theta = \alpha$. Ograničenje je skleronomno, a čestica ima dva stupnja slobode koje možemo opisati koordinatama r i ϕ. Brzina u sfernom sustavu

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\sin\alpha\dot{\phi}\vec{\phi}_0. \tag{4.120}$$

Kinetička energija čestice koja se giba po stošcu

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\dot{\phi}^2\right). \tag{4.121}$$

Sustav se nalazi u homogenom gravitacijskom polju pa potencijalna energija glasi

$$U = mgz = mgr\cos\alpha. \tag{4.122}$$

Lagrangian čestice je razlika kinetičke i potencijalne energije

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\dot{\phi}^2\right) - mgr\cos\alpha. \tag{4.123}$$

Bitno je uočiti da u Lagrangian ulaze samo nezavisne koordinate. Euler-Lagrange jednadžbe glase

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Longrightarrow m\ddot{r} - mr\sin^2\alpha\dot{\phi}^2 + mg\cos\alpha = 0, \tag{4.124}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(mr^2\sin^2\alpha\dot{\phi}\right) = 0. \tag{4.125}$$

Lagrangian ne ovisi o koordinati ϕ (ciklička koordinata) pa je pripadni generalizirani impuls konstanta gibanja

$$p_\phi \equiv mr^2\sin^2\alpha\dot{\phi} \Longrightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\alpha}. \tag{4.126}$$

Nadalje, Lagrangian ne ovisi eksplicitno o vremenu pa je veličina C sačuvana

$$C = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\dot{\phi} - L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\dot{\phi}^2\right) + mgr\cos\alpha, \tag{4.127}$$

i odgovara mehaničkoj energiji $E = T + U$ jer je kinetička energija homogena funkcija drugog reda u generaliziranim brzinama (posljedica skleronomnog ograničenja). Uvrstimo $\dot{\phi}$ u prvu jednadžbu gibanja

$$m\ddot{r} - \frac{p_\phi^2}{mr^3\sin^2\alpha} + mg\cos\alpha = 0. \tag{4.128}$$

Problem smo sveli na jenodimenzionalno gibanje u efektivnom potencijalu

$$V_{eff}(r) = mgr\cos\alpha + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\alpha}. \tag{4.129}$$

Točka ravnoteže odgovara položaju minimuma efektivnog potencijala

$$r_0 = \left(\frac{p_\phi^2}{m^2 g\sin^2\alpha\cos\alpha}\right)^{1/3}. \tag{4.130}$$

Dakle, ako česticu stavimo na visinu $z = r_0\cos\alpha$ i damo joj brzinu u horizontalnom smjeru

$$\vec{v} = \sqrt{gr_0\cos\alpha}\vec{\phi}_0, \tag{4.131}$$

ona će nastaviti kružini na istoj visini. Mala promjena u početnim uvjetima, dovest će do titranja oko kružne orbite.

Primjer 4.4

Ravna žica AB duljine l rotira konstantnom kutnom brzinom ω oko vertikalne osi z. Žica zatvara kut $\pi - \alpha$ s osi z, a po njoj klizi čestica mase m bez trenja. Izvedite Lagrangian, jednadžbu gibanja i nađite njezino rješenje. Ako čestica u početnom trenutku miruje u točki A, koliko vremena joj treba da stigne do točke B? Nađite konstantu gibanja.

Čestica na žici ima samo jedan nezavisan stupanj slobode jer žica koja rotira predstavlja vremenski ovisno (reonomno) ograničenje. Koristit ćemo sferni koordinatni sustav. Brzina čestice glasi

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\sin{(\pi - \alpha)}\omega\vec{\phi}_0, \tag{4.132}$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da je nagib žice stalan, odnosno vrijedi $\dot{\theta} = 0$, i iznosi $\theta = \pi - \alpha$. Kinetička energija čestice iznosi

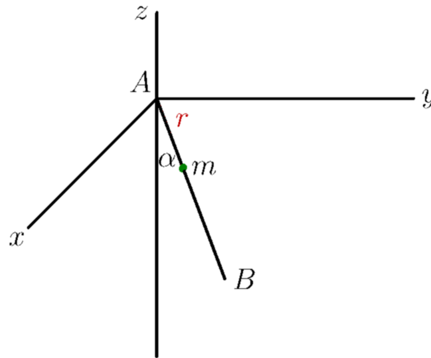
$$T = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \sin^2\alpha\right]. \tag{4.133}$$

Sustav se nalazi u homogenom gravitacijskom polju pa je potencijalna energija čestice

$$U = mgz = mgr\cos{(\pi - \alpha)} = -mgr\cos\alpha. \tag{4.134}$$

Lagrangian čestice odgovara razlici kinetičke i potencijalne energije

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \sin^2\alpha\right) + mgr\cos\alpha. \tag{4.135}$$



Slika 4.6: Sustav žice i čestice. Žica zatvara kut $\pi - \alpha$ s osi z i rotira oko nje konstantnom kutnom brzinom ω.

Euler-Lagrange jednadžba

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0. \tag{4.136}$$

Izračunamo potrebne derivacije

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \text{i} \quad \frac{\partial L}{\partial r} = m\omega^2 \sin^2 \alpha r + mg\cos\alpha, \tag{4.137}$$

i uvrstimo ih u jednadžbu gibanja

$$m\ddot{r} - m\omega^2 \sin^2 \alpha r - mg\cos\alpha = 0. \tag{4.138}$$

Koristimo oznaku: $\Omega = \omega \sin\alpha$ pa se jednadžba gibanja svodi na nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$\ddot{r} - \Omega^2 r - g\cos\alpha = 0. \tag{4.139}$$

Pripadna homogena jednadžba glasi

$$\ddot{r} - \Omega^2 r = 0, \tag{4.140}$$

a njezino opće rješenje je linearna kombinacija eksponencijalnih funkcija

$$r_h(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}. \tag{4.141}$$

Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe je konstanta

$$-\Omega^2 C = g\cos\alpha \Longrightarrow C = -\frac{g\cos\alpha}{\Omega^2}. \tag{4.142}$$

Ukupno rješenje je suma općeg rješenja homogene jednadžbe gibanja i partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe

$$r(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} - \frac{g\cos\alpha}{\Omega^2}. \tag{4.143}$$

Koeficijente A i B izračunamo iz početnih uvjeta

- čestica kreće iz mirovanja: $\dot{r}(t=0) = 0$
- čestica kreće iz točke A: $r(t=0) = 0$

Prvi početni uvjet

$$\dot{r}(0) = A\Omega - B\Omega = 0 \Longrightarrow A = B. \tag{4.144}$$

Drugi početni uvjet

$$r(0) = A + B - \frac{g\cos\alpha}{\Omega^2} = 0 \Longrightarrow A = B = \frac{g\cos\alpha}{2\Omega^2}. \tag{4.145}$$

Dakle, rješenje jednadžbe gibanja

$$r(t) = \frac{g\cos\alpha}{\Omega^2}\left[\cosh\left(\Omega t\right) - 1\right]. \tag{4.146}$$

Označimo s τ vrijeme potrebno čestici da stigne iz točke A do točke B

$$r(\tau) = l \Longrightarrow l = \frac{g\cos\alpha}{\Omega^2}\left[\cosh\left(\Omega \tau\right) - 1\right]. \tag{4.147}$$

Invertiramo prethodnu jednadžbu

$$\tau = \frac{1}{\Omega}\text{Arcosh}\left(1 + \frac{\Omega^2 l}{g\cos\alpha}\right). \tag{4.148}$$

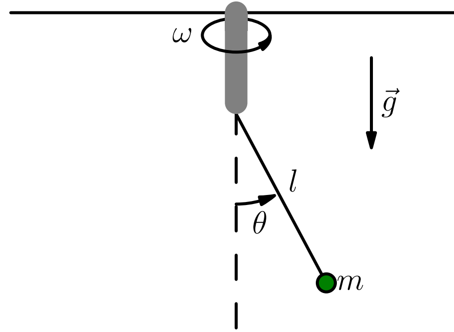
Lagrangian ne ovisi eksplicitno o vremenu pa je C konstanta gibanja

$$C = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r} - L = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\alpha - mgr\cos\alpha. \tag{4.149}$$

Konstanta C ne odgovara mehaničkoj energiji

$$E = T + U = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\alpha - mgr\cos\alpha, \tag{4.150}$$

jer kinetička energija nije homogena funkcija drugog reda u generaliziranim brzinama. Fizikalno, vremenski ovisno ograničenje u vidu žice koja rotira dovodi energiju sustavu.



Slika 4.7: Matematičko njihalo duljine l rotira konstantnom kutnom brzinom ω oko vertikalne osi.

Primjer 4.5

Matematičko njihalo rotira konstantnom kutnom brzinom ω oko vertikalne osi. Izvedite Lagrangian i jednadžbu gibanja. Pokažite da problem možemo svesti na gibanje u 1D efektivnom potencijalu. Izvedite izraz za efektivni potencijal i nađite stabilne i nestabilne točke ravnoteže. Nađite konstantu gibanja.

Čestica na žici ima samo jedan nezavisan stupanj slobode jer žica koja rotira predstavlja vremenski ovisno (reonomno) ograničenje. Za razliku od prethodnog primjera, mijenja se nagib žice θ, dok je udaljenost čestice od ishodišta stalna. Najjednostavnije je raditi u sfernom koordinatnom sustavu. Brzina čestice glasi

$$\dot{\vec{r}} = l\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + l\sin\theta\omega\vec{\phi}_0, \tag{4.151}$$

pri čemu smo uzeli u obzir uvjete $\dot{r} = 0$ i $r = l$. Kinetička energija čestice

$$T = \frac{m}{2}l^2\left[\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta\right]. \tag{4.152}$$

Sustav se nalazi u homogenom gravitacijskom polju pa je potencijalna energija čestice [1]

$$U = -mgz = -mgl\cos\theta. \tag{4.153}$$

Lagrangian čestice je razlika kinetičke i potencijalne energije

$$L = T - U = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}l^2\omega^2\sin^2\theta + mgl\cos\theta. \tag{4.154}$$

Euler-Lagrange jednadžba

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = 0. \tag{4.155}$$

[1] os z je orjentirana u smjeru vektora akceleracije sile teže $\vec{g}$

Izračunamo potrebne derivacije

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = ml^2\ddot{\theta}, \tag{4.156}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta. \tag{4.157}$$

Jednadžbu gibanja

$$ml^2\ddot{\theta} - ml^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + mgl\sin\theta = 0, \tag{4.158}$$

možemo napisati u sljedećem obliku

$$ml^2\ddot{\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{m}{2}l^2\omega^2\sin^2\theta - mgl\cos\theta\right) = 0. \tag{4.159}$$

Problem smo sveli na gibanje u 1D efektivnom potencijalu

$$U_{eff}(\theta) = -\frac{m}{2}l^2\omega^2\sin^2\theta - mgl\cos\theta. \tag{4.160}$$

Točke ravnoteže odgovaraju ekstremima efektivnog potencijala

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial \theta} = 0. \tag{4.161}$$

Točka ravnoteže je

- stabilna ako efektivni potencijal ima minimum
- nestabilna ako efektivni potencijal ima maksimum

Deriviramo efektivni potencijal

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial \theta} = -ml^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + mgl\sin\theta = -\frac{1}{2}ml^2\omega^2\sin 2\theta + mgl\sin\theta. \tag{4.162}$$

Stacionarne točke efektivnog potencijala možemo odrediti iz jednadžbe

$$ml\sin\theta\left(g - l\omega^2\cos\theta\right) = 0. \tag{4.163}$$

Postoje tri moguća rješenja

- $\theta_1 = 0$
- $\theta_2 = \pi$

- $\theta_3 = \arccos \frac{g}{l\omega^2}$ ako vrijedi $\frac{g}{l\omega^2} \leq 1$

Izračunamo drugu derivaciju efektivnog potencijala

$$\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial \theta^2} = -ml^2\omega^2 \cos 2\theta + mgl \cos\theta. \tag{4.164}$$

Promatramo svaku pojedinu točku ravnoteže.
Prva točka ravnoteže: $\theta_1 = 0$

$$\left.\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial \theta^2}\right|_{\theta_1=0} = mgl - ml^2\omega^2 = ml^2\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right). \tag{4.165}$$

Točka $\theta_1 = 0$ može biti stabilna i nestabilna

- ako vrijedi $g/l > \omega^2$ točka ravnoteže θ_1 je stabilna
- ako vrijedi $g/l < \omega^2$ točka ravnoteže θ_1 je nestabilna

Druga točka ravnoteže: $\theta_2 = \pi$

$$\left.\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial \theta^2}\right|_{\theta_1=\pi} = -mgl - ml^2\omega^2. \tag{4.166}$$

Točka θ_2 je uvijek nestabilna.
Treća točka ravnoteže: $\theta_3 = \arccos \frac{g}{l\omega^2}$

$$\left.\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial \theta^2}\right|_{\theta_3} = -ml^2\omega^2 \cos 2\theta_3 + mgl \cos\theta_3 \tag{4.167}$$

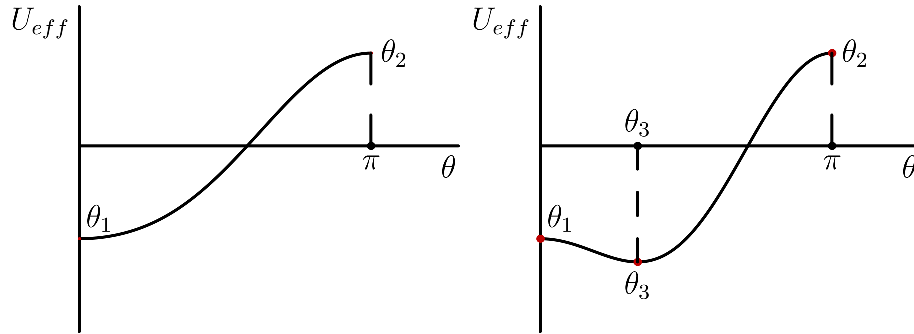
$$= -ml^2\omega^2\left(2\cos^2\theta_3 - 1\right) + mgl\cos\theta_3 \tag{4.168}$$

$$= -\frac{mg^2}{\omega^2} + ml^2\omega^2 \tag{4.169}$$

Točka ravnoteže θ_3 postoji samo ako vrijedi

$$\frac{g}{l\omega^2} \leq 1. \tag{4.170}$$

Ako postoji, ova točka ravnoteže stabilna. Promatramo slučaj $\frac{g}{l\omega^2} > 1$. Postoje samo dvije ekstremalne točke efektivnog potencijala. U točki $\theta_1 = 0$ efektivni potencijal ima minimum pa je ova točka stabilna, dok u točki $\theta_2 = \pi$ efektivni potencijal ima maksimum pa je ova točka nestabilna. Prijeđimo na slučaj $\frac{g}{l\omega^2} < 1$.



Slika 4.8: Efektivni potencijal ako vrijedi $\frac{g}{l\omega^2} > 1$ (lijevo) i $\frac{g}{l\omega^2} < 1$ (desno) .

Postoje tri ekstremalne točke efektivnog potencijala. U točkama $\theta_1 = 0$ i $\theta_2 = \pi$ efektivni potencijal ima maksimum pa su ove točke nestabilne, dok u točki $\theta_3 = \arccos \frac{g}{l\omega^2}$ efektivni potencijal ima minimum pa je ova točka stabilna. Sustav se vrti dovoljno brzo da bi centrifugalna sila nadvladala gravitacijsku.

Lagrangian ne ovisi eksplicitno o vremenu pa je C konstanta gibanja

$$C = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{m}{2} l^2 \omega^2 \sin^2 \theta - mgl \cos \theta. \tag{4.171}$$

Konstanta C ne odgovara mehaničkoj energiji

$$E = T + U = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} l^2 \omega^2 \sin^2 \theta - mgl \cos \theta, \tag{4.172}$$

jer kinetička energija nije homogena funkcija drugog reda u generaliziranim brzinama. Fizikalno, vremenski ovisno ograničenje u vidu žice koja rotira dovodi energiju sustavu.

Primjer 4.6

Izvedite Lagrangian za sferno njihalo. Nađite konstante gibanja.

Sferično njihalo ima dva stupnja slobode koje možemo opisati kutevima θ i ϕ sfernog koordinatnog sustava. Jedino ograničenje na gibanje čestice je nit koja drži česticu na udaljenosti l od ishodišta. Brzina čestice glasi

$$\dot{\vec{r}} = l\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + l\sin\theta\dot{\phi}\vec{\phi}_0, \tag{4.173}$$

pri čemu smo uzeli u obzir uvjete $\dot{r} = 0$ i $r = l$. Kinetička energija čestice

$$T = \frac{m}{2}l^2\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right]. \tag{4.174}$$

Sustav se nalazi u homogenom gravitacijskom polju pa je potencijalna energija čestice

$$U = -mgz = -mgl\cos\theta. \tag{4.175}$$

Lagrangian čestice je razlika kinetičke i potencijalne energije

$$L = T - U = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta + mgl\cos\theta. \tag{4.176}$$

Lagrangian ne ovisi o koordinati ϕ (ciklička koordinata) pa je odgovarajući generalizirani impuls konstanta gibanja

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = ml^2\sin^2\theta\dot{\phi}. \tag{4.177}$$

Nadalje, Lagrangian ne ovisi eksplicitno o vremenu pa je veličina C sačuvana

$$C = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\dot{\theta} + \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi} - L = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta - mgl\cos\theta. \tag{4.178}$$

Konstanta C odgovara mehaničkoj energiji $E = T + U$ jer je kinetička energija homogena funkcija drugog reda u generaliziranim brzinama. Za razliku od prethodna dva primjera, ograničenje na gibanje je skleronomno.

Primjer 4.7

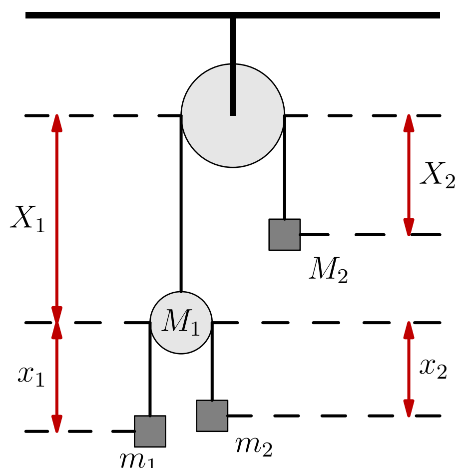
Nađite Lagrangian za sustav na slici i akceleraciju utega mase M_2.

Pretpostavimo da su niti nerastezljive. Neka duljina niti koja povezuje utege M_2 i M_1 iznosi a, a duljina niti koja povezuje utege m_1 i m_2 b. To znači da položaji pojedinih dijelova sustava nisu nezavisni

$$X_1 + X_2 = a, \quad x_1 + x_2 = b, \quad \dot{X}_1 + \dot{X}_2 = 0, \quad \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0. \tag{4.179}$$

Položaji i brzine pojedinih tijela:

- položaj koloture M_1: X_1
- položaj utega M_2: X_2
- položaj utega m_1: $x_1 + X_1$
- položaj utega m_2: $X_1 + x_2$
- brzina koloture M_1: $\dot{X}_1$
- brzina utega M_2: $\dot{X}_2 = -\dot{X}_1$
- brzina utega m_1: $\dot{X}_1 + \dot{x}_1$
- brzina utega m_2: $\dot{X}_1 + \dot{x}_2 = \dot{X}_1 - \dot{x}_1$



Slika 4.9: Atwoodova mašina.

Kinetička energija sustava je suma kinetičkih energija svih čestica u sustavu

$$T = \frac{M_1}{2} v(M_1)^2 + \frac{M_2}{2} v(M_2)^2 + \frac{m_1}{2} v(m_1)^2 + \frac{m_2}{2} v(m_2)^2 \tag{4.180}$$

$$T = \frac{M_1}{2} \dot{X}_1^2 + \frac{M_2}{2} \dot{X}_1^2 + \frac{m_1}{2} (\dot{X}_1 + \dot{x}_1)^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{X}_1 - \dot{x}_1)^2. \tag{4.181}$$

Potencijalna energija sustava je suma potencijalnih energija svih čestica

$$U = -M_1 g X_1 - M_2 g X_2 - m_1 g (X_1 + x_1) - m_2 g (X_1 + x_2). \tag{4.182}$$

Pregrupiramo članove u prethodnoj jednadžbi

$$U = -(M_1 + m_1 + m_2) g X_1 - M_2 g X_2 - m_1 g x_1 - m_2 g x_2, \tag{4.183}$$

a zatim iskoristimo uvjete $X_1 + X_2 = a$, kao i $x_1 + x_2 = b$

$$U = -(M_1 + m_1 + m_2) g X_1 - m_1 g x_1 = -M_2 g (a - X_1) - m_2 g (b - x_1). \tag{4.184}$$

Aditivne konstante pritom možemo izostaviti

$$U = -(M_1 - M_2 + m_1 + m_2) g X_1 - (m_1 - m_2) g x_1. \tag{4.185}$$

U Lagrangianu sustava preostaju samo nezavisne varijable X_1 i x_1, dok smo X_2 i x_2 eliminirali uvjetom nerastezljivosti niti

$$L = T - U = \frac{M_1}{2} \dot{X}_1^2 + \frac{M_2}{2} \dot{X}_1^2 + \frac{m_1}{2} (\dot{X}_1 + \dot{x}_1)^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{X}_1 - \dot{x}_1)^2 \tag{4.186}$$

$$+ (M_1 - M_2 + m_1 + m_2) g X_1 + (m_1 - m_2) g x_1. \tag{4.187}$$

Prva E-L jednadžba

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial X_1} = 0. \tag{4.188}$$

Računamo derivacije potrebne za prvu E-L jednadžbu

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1} = (M_1 + M_2 + m_1 + m_2) \dot{X}_1 + (m_1 - m_2) \dot{x}_1, \tag{4.189}$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = (M_1 - M_2 + m_1 + m_2) g. \tag{4.190}$$

Prva E-L jednadžba

$$(M_1 + M_2 + m_1 + m_2) \ddot{X}_1 + (m_1 - m_2) \ddot{x}_1 = (M_1 - M_2 + m_1 + m_2) g. \tag{4.191}$$

Druga E-L jednadžba

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0. \tag{4.192}$$

Izračunamo potrebne derivacije

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 - m_2)\dot{X}_1 + (m_1 + m_2)\dot{x}_1, \tag{4.193}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = (m_1 - m_2)g. \tag{4.194}$$

Druga E-L jednadžba

$$(m_1 - m_2)\ddot{X}_1 + (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g. \tag{4.195}$$

Eliminiramo $\ddot{x}_1$ iz druge E-L jednadžbe

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\ddot{X}_1, \tag{4.196}$$

i uvrstimo ga u prvu E-L jednadžbu

$$\ddot{X}_1 = \frac{(M_1 - M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}{(M_1 + M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}g. \tag{4.197}$$

Akceleracija utega M_2

$$\ddot{X}_2 = -\ddot{X}_1 = \frac{(M_2 - M_1)(m_1 + m_2) - 4m_1m_2}{(M_1 + M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}g. \tag{4.198}$$

5 D'Alambertov princip

5.1 Uvod

U prethodnim razmatranjima smo pokazali da Newtonove jednadžbe slijede iz varijacionog principa. Sada želimo pokazati da vrijedi i obrat, odnosno da iz Newtonovih jednadžbi možemo izvesti varijacioni postupak. Promatramo sustav od N čestica s $3N$ stupnjeva slobode. Zbog raznih ograničenja na gibanje sustava, broj nezavisnih stupnjeva slobode iznosi $n \leq 3N$. Znak jednakosti dolazi u obzir samo ako nema nikakvih ograničenja. Označimo položaje čestica vektorima $\vec{x}_i$, a nezavisne stupnjeve slobode generaliziranim koordinatama q_i. Pretpostavimo da znamo vezu vektora položaja čestica i generaliziranih koordinata

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, \ldots, q_n; t). \tag{5.1}$$

Sada možemo napisati brzinu pojedine čestice

$$\dot{\vec{x}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}. \tag{5.2}$$

Pritom se drugi član pojavljuje samo ako veza eksplicitno ovisi o vremenu (reonomna veza), što najčešće neće biti slučaj. U daljnjim razmatranjima koristit ćemo dvije leme.

Lema 1

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \right] = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}. \tag{5.3}$$

Lema 2

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right). \tag{5.4}$$

Izračunamo lijevu stranu

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial q_j \partial t}, \tag{5.5}$$

a zatim i desnu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial t \partial q_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial t \partial q_j}. \tag{5.6}$$

Pretpostavimo da $\vec{x}_i$ ima kontinuirane parcijalne derivacije drugog reda. U tom slučaju poredak deriviranja možemo zamijeniti čime smo dokazali istinitost leme 2.

5.2 D'Alambertov princip

Polazimo od Newtonove jednadžbe gibanja za česticu bez ograničenja

$$m\ddot{\vec{x}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = 0. \tag{5.7}$$

Ograničimo sada gibanje čestice zahtjevom da se mora nalaziti na plohi S. Fizikalno, uveli smo dodatno silu koja onemogućava gibanje čestice izvan plohe S. Označimo li silu otpora podloge s $\vec{R}$, jednadžbe gibanja glasi

$$m\ddot{\vec{x}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = \vec{R}. \tag{5.8}$$

Sila otpora je idealizirana i odgovara strmom potencijalu iz prošlog poglavlja. Da bi objasnili D'Alambertov princip, prvo moramo definirati pojam virtualnog pomaka. Radi se o svim pomacima čestice (ne nužno po fizikalnoj putanji) koji su dozvoljeni ograničenjima. U ovom konkretnom primjeru to obuhvaća sve pomake koji ostavljaju česticu na plohi S. D'Alambertov princip kaže da je rad sile otpora (virtualni rad) uvijek jednak nuli

$$\vec{R} \cdot \delta \vec{x} = 0 \quad \forall \delta \vec{x}. \tag{5.9}$$

Geometrijski, sila otpora je uvijek okomita na plohu (idealizacija). Veze koje zadovoljavaju D'Alambertov princip zovemo idealnim ili perfektnim vezama.

5.3 Ekvivalentnost D'Alambertovog i varijacionog principa

D'Alambertov princip u sustavu s N čestica glasi

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \cdot \delta \vec{x}_i = 0. \tag{5.10}$$

Silu otpora $\vec{R}_i$ možemo eliminirati pomoću Newtonove jednadžbe

$$m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i} = \vec{R}_i, \tag{5.11}$$

pa jedn. (5.10) možemo napisati u sljedećem obliku

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i} \right) \cdot \delta \vec{x}_i = 0. \tag{5.12}$$

Prisjetimo se da s $\delta \vec{x}_i$ označavamo sve pomake dozvoljene ograničenjima na gibanje sustava. Postojanje ograničenja implicira da svi pomaci $\delta \vec{x}_i$ nisu nezavisni, odnosno varijable $\vec{x}_i$ ne možemo mijenjati kako želimo i istovremeno poštivati sva ograničenja sustava. Stoga prelazimo na manji broj nezavisnih varijabli q_i koje u sebi već imaju ugrađena sva ograničenja sustava. Pretpostavimo da varijable $\vec{x}_i$ znamo izraziti pomoću nezavisnih varijabli q_i i da ta veza ne ovisi eksplicitno o vremenu

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) \Longrightarrow \dot{\vec{x}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \Longrightarrow \delta \vec{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \tag{5.13}$$

Uvrstimo pomak $\delta \vec{x}_i$ u prvi član D'Alambertovog principa

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{x}}_i \cdot \delta \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{x}}_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \tag{5.14}$$

Promjenimo poredak sumacije

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{x}}_i \cdot \delta \vec{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j, \tag{5.15}$$

a zatim iskoristimo pravilo deriviranja produkta i Lemu 2

$$\ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left[\dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right] - \dot{\vec{x}}_i \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right] = \frac{d}{dt} \left[\dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right] - \dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_j}. \tag{5.16}$$

U sljedećem koraku upotrijebimo Lemu 1

$$\ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left[\dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] - \dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i^2}{\partial q_j}. \tag{5.17}$$

Konačno smo prvi član D'Alambertovog principa sveli na sljedeći oblik

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{x}}_i \cdot \delta \vec{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 \right) \right] \delta q_j. \tag{5.18}$$

Očito, u zagradama su izrazi za kinetičku energiju cijelog sustava

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{x}}_i \cdot \delta\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j. \tag{5.19}$$

Preostao nam je drugi član D'Alambertovog principa

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i} \cdot \delta\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \tag{5.20}$$

Promjenimo poredak sumacija i iskoristimo pravilo lančanog deriviranja

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i} \cdot \delta\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j \tag{5.21}$$

Na kraju, cijeli D'Alambertov princip smo sveli na jednadžbu

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0. \tag{5.22}$$

Stupnjevi slobode q_j su nezavisni pa su i varijacije δq_j nezavisne. To znači da uvijek možemo izabrati samo jednu varijaciju različitu od nule pa izraz u zagradi mora iščezavati za svaki j

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - U) = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, n. \tag{5.23}$$

Uz pretpostavku da potencijalna energija ne ovisi o brzinama, možemo napisati

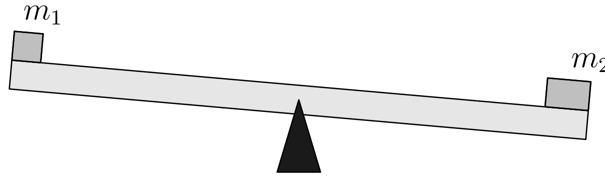
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T - U) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - U) = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, n, \tag{5.24}$$

a to je upravo Lagrangeova jednadžba. Dakle, možemo zaključiti da D'Alambertov princip vodi na iste jednadžbe gibanja kao i varijacioni postupak.

5.4 Uvjeti statičke ravnoteže

Uvjet mirovanja za sustav s N čestica

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i} \delta\vec{x}_i = 0. \tag{5.25}$$



Slika 5.1: Greda s dva bloka mase m_1 i m_2.

5.4.1 Primjer: Arhimedova poluga

Pretpostavimo da je greda kruta i da su mase fiksirane, dok se točka potpornja i nagib grede mogu mijenjati. Kao koordinate koristimo kut nagiba ϕ i pomak potpornja x. Virtualni pomaci δx i $\delta\phi$ su nezavisni. Prvo primjenimo D'Alambertov princip na virtualni pomak δx uz fiksirani kut nagiba ϕ.

$$-F_1\delta x\cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)+F_2\delta x\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)=0\Longrightarrow\delta x\left(F_1+F_2\right)\sin\phi=0. \quad (5.26)$$

Uvrstimo sile F_1 i F_2 pa slijedi

$$\delta x(m_1+m_2)g\sin\phi=0\Longrightarrow\phi=0. \quad (5.27)$$

Sada primjenimo D'Alambertov princip na virtualni pomak $\delta\phi$ uz fiksiranu udaljenost potpornja

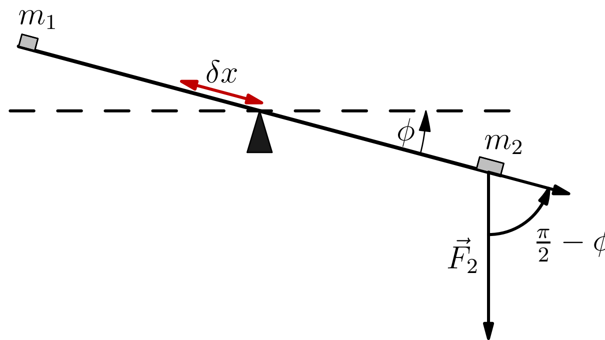
$$\sum_i\vec{F}_i\delta\vec{y}_i=0. \quad (5.28)$$

Uz definiciju promjene kuta ϕ, kao na sl. 5.2 promjena položaja utega iznosi

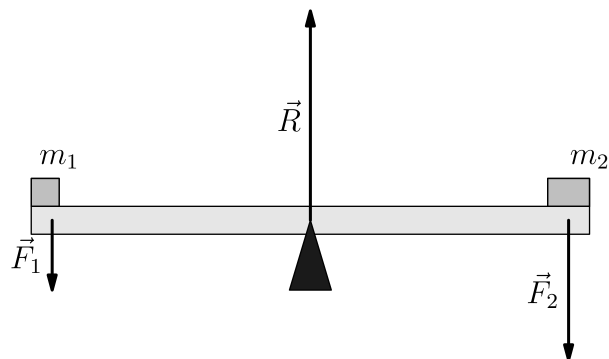
$$y_1=-l_1\delta\phi,\quad y_2=l_2\delta\phi, \quad (5.29)$$

pri čemu je l_1 udaljenost utega 1, a l_2 udaljenost utega 2 od potpornja. Vratimo se D'Alambertovom principu

$$-F_1l_1\delta\phi+F_2\delta l_2\delta\phi=0\Longrightarrow\left(-F_1l_1+F_2l_2\right)\delta\phi=0. \quad (5.30)$$



Slika 5.2: Nezavisne koordinate su pomak potpornja x i kut nagiba grede ϕ.



Slika 5.3: Sila otpora $\vec{R}$ i sile koje djeluju na blokove $\vec{F}_1 = m_1\vec{g}$ i $\vec{F}_2 = m_2\vec{g}$.

Reproducirali smo Arhimedov rezultat

$$F_1 l_1 = F_2 l_2. \tag{5.31}$$

Sada možemo odrediti i silu otpora potpornja

$$R = F_1 + F_2. \tag{5.32}$$

Primjer 5.1

Izvedite jednadžbu gibanja za njihalo u ravnini koristeći D'Alambertov princip.

Pretpostavimo da je nit kojom je kuglica vezana nerastezljiva, kao i da ima dužinu l. Kuglica ima jedan stupanj slobode, a kao nezavisnu generaliziranu koordinatu biramo kut ϕ. Položaj kuglice dan je relacijom

$$\vec{r} = l\sin\phi\vec{i} + l\cos\phi\vec{j}. \tag{5.33}$$

Primjenimo D'Alambertov princip na ovaj problem

$$\left(m\ddot{\vec{r}} - m\vec{g}\right)\cdot\delta\vec{r} = 0, \tag{5.34}$$

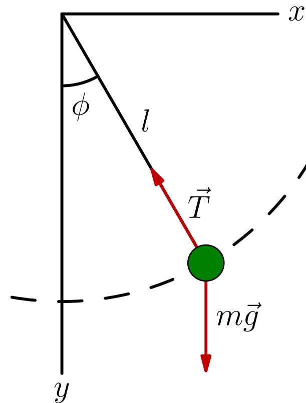
pri čemu virtualni pomak mora zadovoljavati ograničenje na gibanje čestice (udaljenost od objesišta je konstantna i odgovara duljini niti)

$$\delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\delta\phi = l\cos\phi\delta\phi\vec{i} - l\sin\phi\delta\phi\vec{j}. \tag{5.35}$$

Izračunamo brzinu i ubrzanje kuglice

$$\dot{\vec{r}} = l\cos\phi\dot{\phi}\vec{i} - l\sin\phi\delta\phi\vec{j}, \tag{5.36}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left(-l\sin\phi\dot{\phi}^2 + l\cos\phi\ddot{\phi}\right)\vec{i} + \left(-l\cos\phi\dot{\phi}^2 - l\sin\phi\ddot{\phi}\right)\vec{j}, \tag{5.37}$$



Slika 5.4: Matematičko njihalo u ravnini. Kuglica ima samo jedan stupnja slobode jer se u svakom trenu nalazi na udaljenosti l od objesišta. Kao generaliziranu koordinatu biramo kut ϕ.

i raspišemo vektor ubrzanja sile teže $\vec{g} = g\vec{j}$. Pojedini članovi u D'Alambertovoj jednadžbi glase

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r} = l^2\ddot{\phi}\delta\phi \quad \text{i} \quad \vec{g} \cdot \delta\vec{r} = -lg\sin\phi\delta\phi. \tag{5.38}$$

D'Alambertova jednadžba

$$\left(l^2\ddot{\phi} + lg\sin\phi\right)\delta\phi = 0, \tag{5.39}$$

mora vrijediti za svaki pomak $\delta\phi$ pa izraz u zagradi mora iščezavati

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0. \tag{5.40}$$

Primjer 5.2

Čestica se giba u homogenom gravitacijskom polju po unutrašnjosti stošca otvornog kuta 2α. Izvedite jednadžbe gibanja čestice koristeći D'Alambertov princip.

Gibanje čestice ograničeno je na unutrašnjost stošca

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = \rho\cot\alpha. \tag{5.41}$$

Čestica ima dva stupnja slobode, a kao nezavisne generalizirane koordinate biramo varijable ρ i ϕ. Položaj čestice izrazimo pomoću generaliziranih koordinata

$$\vec{r} = \rho\cos\phi\vec{i} + \rho\sin\phi\vec{j} + \rho\cot\alpha\vec{k}. \tag{5.42}$$

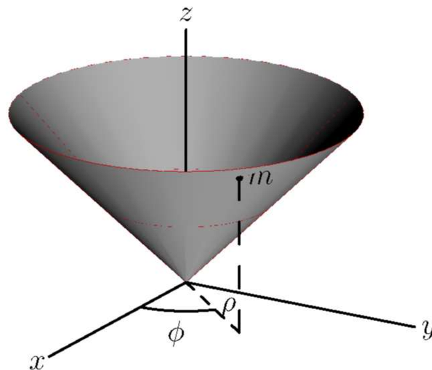
Izračunamo brzinu i ubrzanje čestice

$$\dot{\vec{r}} = \left(\dot{\rho}\cos\phi - \rho\sin\phi\dot{\phi}\right)\vec{i} + \left(\dot{\rho}\sin\phi + \rho\cos\phi\dot{\phi}\right)\vec{j} + \dot{\rho}\cot\alpha\vec{k}, \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} = &\left(\ddot{\rho}\cos\phi - 2\dot{\rho}\dot{\phi}\sin\phi - \rho\cos\phi\dot{\phi}^2 - \rho\sin\phi\ddot{\phi}\right)\vec{i} \\ &+ \left(\ddot{\rho}\sin\phi + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\cos\phi - \rho\sin\phi\dot{\phi}^2 + \rho\cos\phi\ddot{\phi}\right)\vec{j} \\ &+ \ddot{\rho}\cot\alpha\vec{k}.\end{aligned} \tag{5.44}$$

Virtualni pomak čestice u D'Alambertovom principu

$$\left(m\ddot{\vec{r}} - m\vec{g}\right)\cdot\delta\vec{r} = 0, \tag{5.45}$$



Slika 5.5: Gibanje čestice ograničeno je na unutrašnjost stošca. Čestica ima dva stupnja slobode, a kao nezavisne generalizirane koordinate biramo koordinate cilindričnog sustava ρ i ϕ.

mora poštivati uvjet gibanja po stošcu

$$\delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\delta\phi, \tag{5.46}$$

$$\Longrightarrow \delta\vec{r} = (\delta\rho\cos\phi - \rho\sin\phi\delta\phi)\,\vec{i} + (\delta\rho\sin\phi + \rho\cos\phi\delta\phi)\,\vec{j} + \delta\rho\cot\alpha\vec{k}. \tag{5.47}$$

Pojedini članovi u D'Alambertovoj jednadžbi glase

$$\ddot{\vec{r}}\cdot\delta\vec{r} = \left(\frac{1}{\sin^2\alpha}\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\delta\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\delta\phi, \tag{5.48}$$

$$-m\vec{g}\cdot\delta\vec{r} = -mg(-\vec{k})\cdot\delta\vec{r} = mg\cot\alpha\delta\rho, \tag{5.49}$$

dok sama D'Alambertova jednadžba

$$m\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 + mg\cot\alpha\right)\delta\rho + m\left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\delta\phi = 0, \tag{5.50}$$

zapravo predstavlja dvije jednadžbe jer su pomaci $\delta\rho$ i $\delta\phi$ nezavisni

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 + mg\cot\alpha = 0, \tag{5.51}$$

$$2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi} = 0. \tag{5.52}$$

Primjer 5.3

Dva bloka s masama m_1 i m_2 nalaze se na glatkoj dvostrukoj kosini, a povezani su nerastezljivom niti prebačnom preko glatke, nepomične koloture. Koristeći D'Alambertov princip, pokažite da u položaju ravnoteže vrijedi

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Da bi sustav bio u ravnoteži mora biti ispunjen sljedeći uvjet

$$m_1\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_1 + m_2\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_2 = 0. \tag{5.53}$$

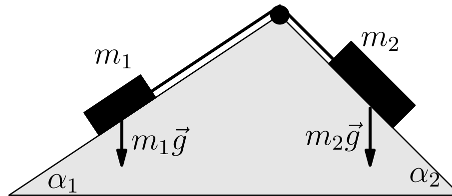
Sile otpora $\vec{N}_1$ i $\vec{N}_2$ okomite su na pomake duž kosine $\delta\vec{r}_1$ i $\delta\vec{r}_2$ pa u gornju relaciju ulaze samo sile $\vec{F}_1 = m_1\vec{g}$ i $\vec{F}_2 = m_2\vec{g}$. Izračunamo skalarne produkte

$$m_1 g\sin\alpha_1\delta r_1 + m_2 g\sin\alpha_2\delta r_2. \tag{5.54}$$

Nit je nerastezljiva pa vrijedi $\delta r_1 + \delta r_2 = 0$, odnosno

$$g\left(m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2\right)\delta r_1 = 0 \Longrightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{5.55}$$

a to je upravo relacija koju smo trebali pokazati.



Slika 5.6: Blokovi na dvostrukoj kosini. Pomak bloka m_1 niz kosinu označimo s $\delta\vec{r}_1$, pomak bloka m_2 s $\delta\vec{r}_2$.

Klasična mehanika 1

Četvrti dio

Gibanje krutog tijela.

September 24, 2015

Sadržaj

*

1 Kinematika krutog tijela

1.1 Ortogonalne transformacije

Promatramo dva koordinatna sustava S i S' sa zajedničkim ishodištem Jedinične vektore koordinatnog sustava S' možemo izraziti pomoću jediničnih vektora koordinatnog sustava S

$$\vec{i}' = (\vec{i}' \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{i}' \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{i}' \cdot \vec{k})\vec{k}, \tag{1.1}$$

$$\vec{j}' = (\vec{j}' \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{j}' \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{j}' \cdot \vec{k})\vec{k}, \tag{1.2}$$

$$\vec{k}' = (\vec{k}' \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{k}' \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{k}' \cdot \vec{k})\vec{k}. \tag{1.3}$$

Da bi mogli koristiti simbole suma, uvodimo prikladnije oznake

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \equiv \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \tag{1.4}$$

$$\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}' \equiv \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3. \tag{1.5}$$

Skalarne produkte jediničnih vektora označimo kao elemente matrice

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j \equiv a_{ij}, \tag{1.6}$$

čime jedn. (1.1-1.3) poprimaju sljedeći oblik

$$\begin{array}{l} \vec{e}'_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 = a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \end{array} \Longrightarrow \vec{e}'_i = \sum_k a_{ik}\vec{e}_k.$$

Svaki vektor možemo raspisati koristeći jedinične vektore bilo S ili S' sustava

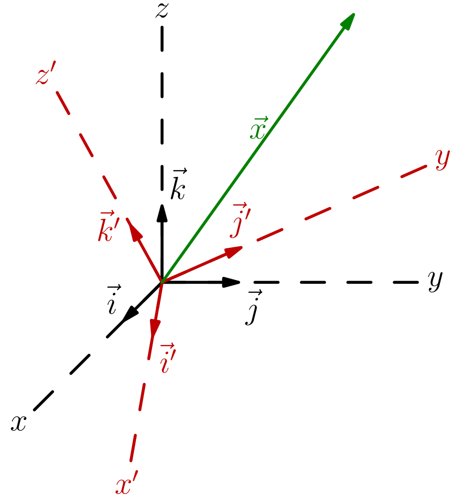
$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2 + x'_3\vec{e}'_3, \tag{1.7}$$

pri čemu smo s x_i označili komponente vektora u sustavu S, a s x'_i komponente vektora u sustavu S'. Pomnožimo jedn. (1.7) s $\vec{e}'_i$

$$x'_i = \vec{x} \cdot \vec{e}'_i = \sum_k x_k(\vec{e}'_i \cdot \vec{e}_k) = \sum_k x_k a_{ik}. \tag{1.8}$$

Norma vektora mora biti jednaka u oba sustava

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 \Longrightarrow \sum_k x^2_k = \sum_j x'^2_j. \tag{1.9}$$



Slika 1.1: Dva koordinatna sustava S i S' sa zajedničkom ishodištem. Vektor $\vec{x}$ možemo raspisati pomoću jediničnih vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ili $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$.

Uvrstimo transformaciju (1.8) u jedn. (1.9)

$$\sum_k x_k^2 = \sum_j \sum_m a_{jm} x_m \sum_n a_{jn} x_n = \sum_{mn} x_m x_n \sum_j a_{jm} a_{jn}. \tag{1.10}$$

Da bi relacija (1.10) bila ispunjena mora vrijediti

$$\sum_j a_{jm} a_{jn} = \delta_{mn} \Longrightarrow \sum_j a^T_{mj} a_{jn} = \delta_{mn} \Longrightarrow A^T A = 1. \tag{1.11}$$

Svaka linearna transformacija $x_i' = \sum_k a_{ik} x_k$, za koju vrijedi

$$\sum_j a_{jm} a_{jn} = \delta_{mn}, \tag{1.12}$$

zove se ortogonalna transformacija. Uvjet $\sum\limits_j a_{jm} a_{jn} = \delta_{mn}$ daje 6 linearnih jednadžbi

$$a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} + a_{31}a_{31} = 1, \tag{1.13}$$
$$a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{32}a_{32} = 1, \tag{1.14}$$
$$a_{13}a_{13} + a_{23}a_{23} + a_{33}a_{33} = 1, \tag{1.15}$$
$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, \tag{1.16}$$
$$a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0, \tag{1.17}$$
$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0, \tag{1.18}$$

što znači da je od 9 koeficijenata a_{ij} samo 3 nezavisno. Da bi parametrizirali rotaciju u prostoru, potrebna su nam tri kuta.

1.1.1 Svojstva ortogonalnih transformacija

Pretpostavimo da su a i b ortogonalne transformacije takve da vrijedi

$$x'_k = \sum_j b_{kj} x_j \quad (S \to S') \tag{1.19}$$

$$x''_i = \sum_k a_{ik} x'_k \quad (S' \to S''). \tag{1.20}$$

Promotrimo ukupnu transformaciju

$$x''_i = \sum_k a_{ik} x'_k = \sum_k a_{ik} \sum_j b_{kj} x_j = \sum_{kj} a_{ik} b_{kj} x_j = \sum_j (ab)_{ij} x_j. \tag{1.21}$$

Matrica ukupne transformacije c je produkt matrica a i b, tj. $c = ab$. Želimo provjeriti da li je ukupna transformacija još uvijek ortogonalna. Dovoljno je pokazati da matrica c zadovoljava uvjet ortogonalnosti $cc^T = 1$

$$\left(cc^T\right)_{ij} = \sum_m c_{mi} c_{mj} = \sum_m \left[\sum_k a_{mk} b_{ki}\right] \left[\sum_l a_{ml} b_{lj}\right]. \tag{1.22}$$

Promijenimo poredak sumacije

$$\left(cc^T\right)_{ij} = \sum_{kl} b_{ki} b_{lj} \left[\sum_m a_{mk} a_{ml}\right], \tag{1.23}$$

i iskoristimo uvjet ortogonalnosti matrice a

$$\left(cc^T\right)_{ij} = \sum_{kl} b_{ki} b_{lj} \delta_{kl}. \tag{1.24}$$

Sumu po indeksu l eliminiramo pomoću Kroneckerovog simbola i na kraju iskoristimo uvjet ortogonalnosti matrice b

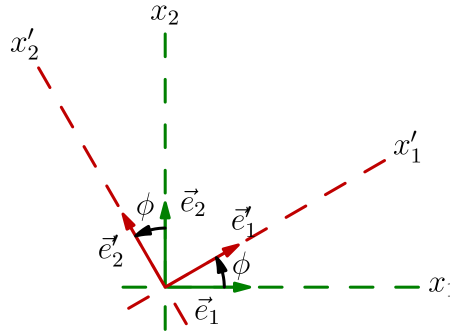
$$\left(cc^T\right)_{ij} = \sum_k b_{ki} b_{kj} = \left(b^T b\right)_{ij} = \delta_{ij}. \tag{1.25}$$

Ukupna transformacija je zaista ortogonalna. Svaku rotaciju možemo rastaviti na više uzastopnih rotacija. Kompozicija rotacija nije komutativna

$$ab \neq ba, \tag{1.26}$$

ali jest asocijativna operacija

$$(ab)c = a(bc). \tag{1.27}$$



Slika 1.2: Rotacija u dvije dimenzije.

Ako transformacija a prevodi sustav S u S', onda njezina inverzna transformacija vraća sustav S' u S. Iz uvjeta ortogonalnosti slijedi da je inverzna matrica jednaka transponiranoj matrici

$$aa^T = 1 \Longrightarrow a^{-1} = A^T. \tag{1.28}$$

Uvjet ortogonalnosti fiksira vrijednost determinante ortogonalne matrice

$$det(aa^T) = det(1) = 1. \tag{1.29}$$

Determinanta produkta dvije matrice jednaka je produktu njihovih determinanti

$$det(aa^T) = det(a)det(a^T). \tag{1.30}$$

Determinanta transponirane matrice jednaka je determinanti početne matrice

$$det(aa^T) = [det(a)]^2 . \tag{1.31}$$

Došli smo do zaključka

$$[det(a)]^2 = 1 \Longrightarrow det(a) = \pm 1. \tag{1.32}$$

Može se pokazati da rotacijama odgovara vrijednost $+1$.

Primjer: rotacije u ravnini

Pretpostavimo da os x' koordinatnog sustava S' i os x sustava S zatvaraju kut ϕ. Isto vrijedi za osi y' i y, dok su osi z i z' zajedničke. Računamo elemente matrice

rotacije

$$a_{11} = \vec{e}_1' \cdot \vec{e}_1 = \cos\phi, \tag{1.33}$$
$$a_{12} = \vec{e}_1' \cdot \vec{e}_2 = \cos(90^0 - \phi) = \sin\phi, \tag{1.34}$$
$$a_{13} = \vec{e}_1' \cdot \vec{e}_3 = 0, \tag{1.35}$$
$$a_{21} = \vec{e}_2' \cdot \vec{e}_1 = \cos(90^0 + \phi) = -\sin\phi, \tag{1.36}$$
$$a_{22} = \vec{e}_2' \cdot \vec{e}_2 = \cos\phi, \tag{1.37}$$
$$a_{23} = \vec{e}_2' \cdot \vec{e}_3 = 0, \tag{1.38}$$
$$a_{31} = \vec{e}_3' \cdot \vec{e}_1 = 0, \tag{1.39}$$
$$a_{32} = \vec{e}_3' \cdot \vec{e}_2 = 0, \tag{1.40}$$
$$a_{33} = \vec{e}_3' \cdot \vec{e}_3 = 1. \tag{1.41}$$

Matrica transformacije glasi

$$a = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

1.1.2 Einsteinova konvencija o sumaciji

Po indeksima koji se u izrazu ponavljaju sumiramo, iako znak sume nije eksplicitno napisan.
Primjer 1: sumiramo po indeksu k

$$\vec{e}_i' = \sum_k a_{ik}\vec{e}_k \Longleftrightarrow \vec{e}_i' = a_{ik}\vec{e}_k \tag{1.43}$$

Primjer 2: sumiramo po indeksima i i j

$$(abc)_{mn} = \sum_{ij} a_{mi}b_{ij}c_{jn} \Longleftrightarrow (abc)_{mn} = a_{mi}b_{ij}c_{jn} \tag{1.44}$$

1.1.3 Levi-Civita simbol

Definicija Levi-Civita simbola glasi

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \tag{1.45}$$
$$\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1 \tag{1.46}$$
$$\epsilon_{ijk} = 0 \text{ za sve ostale kombinacije} \tag{1.47}$$

Korištenjem Levi-Civita simbola notacija postaje preglednija. Kao prvi primjer možemo pokazati da 3×3 determinantu možemo napisati pomoću Levi-Civita simbola

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}. \tag{1.48}$$

Da li doista reproduciramo formulu za determinantu?

$$\begin{aligned} D &= \epsilon_{123} a_{11} a_{22} a_{33} + \epsilon_{231} a_{12} a_{23} a_{31} + \epsilon_{312} a_{13} a_{21} a_{32} && (1.49) \\ &+ \epsilon_{213} a_{12} a_{21} a_{33} + \epsilon_{132} a_{11} a_{23} a_{32} + \epsilon_{321} a_{13} a_{22} a_{31} && (1.50) \\ &= a_{11} \left(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32} \right) && (1.51) \\ &- a_{12} \left(a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31} \right) && (1.52) \\ &+ a_{13} \left(a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31} \right). && (1.53) \end{aligned}$$

Formulu za vektorski produkt također možemo napisati pomoću Levi-Civita simbola

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = \sum_{ij} \epsilon_{ijk} a_i b_j. \tag{1.54}$$

Product Kroneckera i Levi-Civita simbola iščezava

$$\sum_{ij} \delta_{ij} \epsilon_{ijk} = 0, \tag{1.55}$$

jer je δ_{ij} simetričan, a ϵ_{ijk} antisimetričan s obzirom na zamjenu indeksa i, j. Produkt dva Levi-Civita simbola

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = &\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} \\ &- \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl}. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Iz produkta Levi-Civita simbola slijede neke korisne relacije

$$\begin{aligned} \sum_{pq} \epsilon_{ipq} \epsilon_{jpq} = &\sum_{pq} [\delta_{ij} \delta_{pp} \delta_{qq} + \delta_{ip} \delta_{pq} \delta_{qj} + \delta_{iq} \delta_{pj} \delta_{qp}] \\ &- \sum_{pq} [\delta_{ip} \delta_{pj} \delta_{qq} + \delta_{ij} \delta_{pq} \delta_{qp} + \delta_{iq} \delta_{pp} \delta_{qj}]. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Izračunamo sume u prethodnom izrazu

$$\sum_{pq} \epsilon_{ipq} \epsilon_{jpq} = 9\delta_{ij} + \delta_{ij} \delta_{ij} - 3\delta_{ij} - 3\delta_{ij} - 3\delta_{ij} = 2\delta_{ij}.$$

Sljedeća korisna relacija

$$\begin{aligned}\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} &= \sum_k [\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kk} + \delta_{iq}\delta_{jk}\delta_{kp} + \delta_{ik}\delta_{jp}\delta_{kq}] \\ &- \sum_k [\delta_{iq}\delta_{jp}\delta_{kk} + \delta_{ip}\delta_{jk}\delta_{kq} + \delta_{ik}\delta_{jq}\delta_{kp}] \\ &= 3\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp} + \delta_{iq}\delta_{jp} - 3\delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{ip}\delta_{jq} \\ &= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Zadnja relacija koju ćemo koristiti

$$\begin{aligned}\sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= \sum_{ijk} [\delta_{ii}\delta_{jj}\delta_{kk} + \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki} + \delta_{ik}\delta_{ji}\delta_{kj}] \\ &- \sum_{ijk} [\delta_{ij}\delta_{ji}\delta_{kk} + \delta_{ii}\delta_{jk}\delta_{kj} + \delta_{ik}\delta_{jj}\delta_{ki}] \\ &= 27 + 3 + 3 - 9 - 9 - 9 = 6. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Primjer 1:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \sum_k (\vec{a} \times \vec{b})_k (\vec{a} \times \vec{b})_k \tag{1.60}$$

$$= \sum_k \left[\sum_{ij} a_i b_j \epsilon_{ijk} \sum_{mn} a_m b_n \epsilon_{mnk} \right] = \sum_{ijmn} \left[a_i a_m b_j b_n \sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} \right] \tag{1.61}$$

$$= \sum_{ijmn} [a_i b_j a_m b_n (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})] \tag{1.62}$$

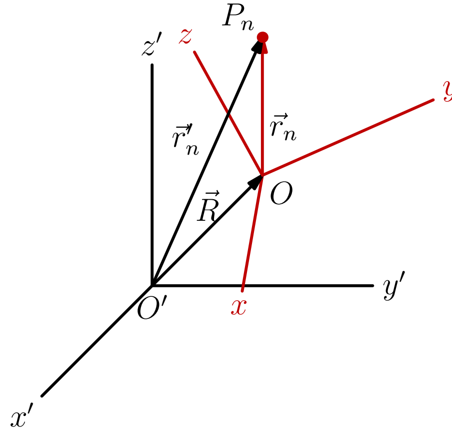
$$= \sum_{ij} [a_i b_j a_i b_j - a_i b_j a_i b_j] = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2. \tag{1.63}$$

Primjer 2:

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \sum_k c_k (\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_k \left[\sum_{ij} c_k a_i b_j \epsilon_{ijk} \right] \tag{1.64}$$

$$= \sum_{ijk} b_j c_k \epsilon_{ijk} a_i = \sum_{ijk} b_j c_k \epsilon_{jki} a_i \tag{1.65}$$

$$= \sum_i (\vec{b} \times \vec{c})_i a_i = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}). \tag{1.66}$$



Slika 1.3: Nepomični sustav $x'y'z'$ i sustav vezan uz kruto tijelo xyz.

1.2 Kutna brzina krutog tijela

U razmatranjima vezanim uz dinamiku gibanja krutog tijela koristit ćemo dva koordinatna sustava

- nepomični sustav O' s osima x', y' i z'
- sustav vezan uz kruto tijelo O s osima x, y i z

Označimo s $\vec{R}$ položaj ishodišta O u nepomičnom sustavu. Položaj proizvoljne točke P u sustavu O označimo s $\vec{r}_n$, a u sustavu O' s $\vec{r}'_n$. Veza između ta tri vektora glasi

$$\vec{r}'_n = \vec{R} + \vec{r}_n. \tag{1.67}$$

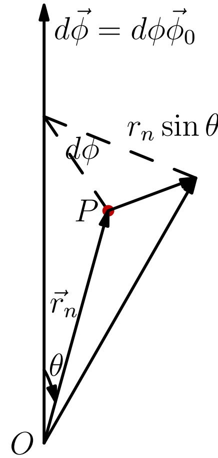
Infinitezimalni pomak tijela možemo rastaviti na translaciju i rotaciju. Translacijom se sve točke tijela pomaknu za isti iznos $d\vec{R}$, dok infinitezimalnu rotaciju definiramo pomoću osi rotacije i infinitezimalnog kuta rotacije. Uvedemo vektor $d\vec{\phi} = d\phi\vec{\phi}_0$, usmjeren duž osi rotacije (koja prolazi kroz ishodište O) s iznosom jednakim kutu $d\phi$, pri čemu smjer osi rotacije određujemo pravilom desne ruke. Točka P se zbog rotacije pomakne okomito na os $\vec{\phi}_0$ za iznos

$$r_n \sin\theta d\phi \Longrightarrow d\vec{r}_{rot,n} = d\vec{\phi} \times \vec{r}_n. \tag{1.68}$$

Ukupni pomak čestice je zbroj translatornog i rotacionog doprinosa

$$d\vec{r}'_n = d\vec{R} + d\vec{\phi} \times \vec{r}_n. \tag{1.69}$$

Koristimo sljedeće oznake



Slika 1.4: Pomak točke P nakon infinitezimalne rotacije za kut $d\phi$.

- brzina točke P u odnosu na O': $\vec{v}_n'$
- kutna brzina krutog tijela: $\vec{\Omega} = \dfrac{d\vec{\phi}}{dt}$
- translatorna brzina krutog tijela: $\vec{V} = \dfrac{d\vec{R}}{dt}$

Podijelimo jedn. (1.69) s dt

$$\vec{v}_n' = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_n. \tag{1.70}$$

Točka P je nepomična u odnosu na O jer je dio krutog tijela odaberimo sada za ishodište sustava vezanog uz tijelo neku drugu točku O_a tako da vrijedi

$$\vec{r}_n = \vec{r}_{n,a} + \vec{a}. \tag{1.71}$$

Uvrstimo relaciju (1.71) u jedn. (1.70)

$$\vec{v}_n' = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{a} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{n,a}. \tag{1.72}$$

Da smo krenuli direktno od sustava O' i O_a dobili bi

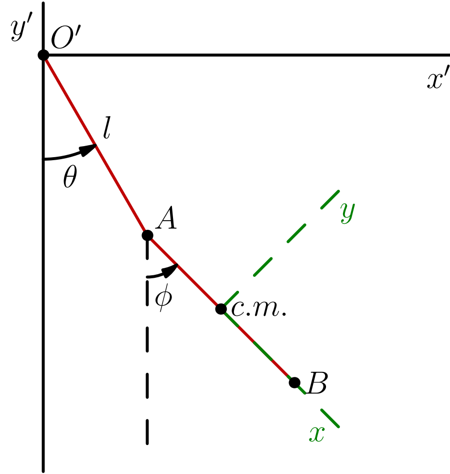
$$\vec{v}_n' = \vec{V}_a + \vec{\Omega}_a \times \vec{r}_{n,a}. \tag{1.73}$$

Usporedbom zadnje dvije jednadžbe dolazimo do zaključka

$$\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{a}, \tag{1.74}$$

$$\vec{\Omega}_a = \vec{\Omega}. \tag{1.75}$$

Kutna brzina ne ovisi o izboru koordinatnog sustava vezanog uz tijelo, dok translatorna brzina ovisi o tom izboru.



Slika 1.5: Sustav dva štapa. Kraj gornjeg štapa je fiksiran u ishodištu nepomičnog sustava, dok je ishodište pomičnog sustava smješteno u centru mase donjeg štapa.

Primjer: dva štapa u ravnini

Promatramo dva štapa duljine l koji se njišu u ravnini xy. Kraj gornjeg štapa je fiksiran u ishodištu nepomičnog sustava. Ishodište pomičnog sustava smjestimo u centar mase donjeg štapa. Direktnim računom želim pokazati da je kutna brzina donjeg štapa $\dot{\phi}$. Koordinate točke A u nepomičnom sustavu glase

$$x'_A = l\sin\theta \ , \quad y'_A = -l\cos\theta \ , \quad z'_A = 0. \tag{1.76}$$

Komponente brzine točke A u nepomičnom sustavu

$$\dot{x}'_A = l\cos\theta\dot{\theta} \quad \text{i} \quad \dot{y}'_A = l\sin\theta\dot{\theta}. \tag{1.77}$$

Koordinate centra mase u nepomičnom sustavu

$$x'_{c.m.} = l\sin\theta + \frac{l}{2}\sin\phi \tag{1.78}$$

$$y'_{c.m.} = -l\cos\theta - \frac{l}{2}\cos\phi \tag{1.79}$$

$$z'_{c.m.} = 0. \tag{1.80}$$

Komponente brzine centra mase u nepomičnom sustavu

$$\dot{x}'_{c.m.} = l\cos\theta\dot{\theta} + \frac{l}{2}\cos\phi\dot{\phi} \tag{1.81}$$

$$\dot{y}'_{c.m.} = l\sin\theta\dot{\theta} + \frac{l}{2}\sin\phi\dot{\phi}. \tag{1.82}$$

Brzina točke A dana je jedn. (1.70)

$$\vec{v}_A' = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_A. \tag{1.83}$$

Ishodište pomičnog sustava nalazi se u centru mase pa je $\vec{V}$ zapravo brzina centra mase. Položaj točke A u odnosu na ishodište pomičnog sustava

$$\vec{r}_A = (x_A - x_{c.m.})\,\vec{i}' + (y_A - y_{c.m.})\,\vec{j}' = -\frac{l}{2}\sin\phi\vec{i}' + \frac{l}{2}\cos\phi\vec{j}'. \tag{1.84}$$

Štap se njiše u ravnini pa samo z komponenta kutne brzine može biti različita od nule

$$\vec{\Omega} \times \vec{r}_A = \Omega\vec{k}' \times \left(-\frac{l}{2}\sin\phi\vec{i}' + \frac{l}{2}\cos\phi\vec{j}'\right) = \frac{l\Omega}{2}\left(-\sin\phi\vec{j}' - \cos\phi\vec{i}'\right). \tag{1.85}$$

Brzina ishodišta pomičnog sustava

$$\vec{V} = \dot{x}'_{c.m.}\vec{i}' + \dot{y}'_{c.m.}\vec{j}' = l\left(\cos\theta\dot{\theta} + \frac{\dot{\phi}}{2}\cos\phi\right)\vec{i}' + l\left(\sin\theta\dot{\theta} + \frac{\dot{\phi}}{2}\sin\phi\right)\vec{j}'. \tag{1.86}$$

Brzina točke A

$$\vec{v}_A' = \dot{x}_A\vec{i}' + \dot{y}_A\vec{j}' = l\cos\theta\dot{\theta}\vec{i}' + l\sin\theta\dot{\theta}\vec{j}' \tag{1.87}$$

Izjednačimo komponente u jedn. (1.83)

- izrazi uz $\vec{i}'$

$$l\cos\theta\dot{\theta} = l\cos\theta\dot{\theta} + \frac{l}{2}\cos\phi\dot{\phi} - \frac{l\Omega}{2}\cos\phi \Longrightarrow \Omega = \dot{\phi}. \tag{1.88}$$

- izrazi uz $\vec{j}'$ daju isti rezultat

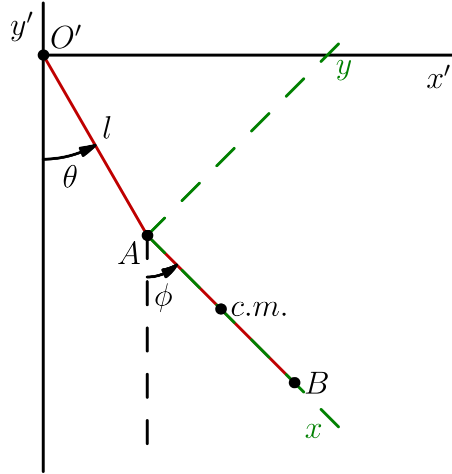
$$l\sin\theta\dot{\theta} = l\sin\theta\dot{\theta} + \frac{l}{2}\sin\phi\dot{\phi} - \frac{l\Omega}{2}\sin\phi \Longrightarrow \Omega = \dot{\phi}. \tag{1.89}$$

Centar mase donjeg štapa giba se brzinom

$$\vec{V} = l\left(\cos\theta\dot{\theta} + \frac{\dot{\phi}}{2}\cos\phi\right)\vec{i}' + l\left(\sin\theta\dot{\theta} + \frac{\dot{\phi}}{2}\sin\phi\right)\vec{j}', \tag{1.90}$$

dok štap istovremeno rotira oko centra mase kutnom brzinom $\dot{\phi}$.

Promatramo isti sustav, ali sad ishodište pomičnog sustava smjestimo u točku A. Brzina centra mase dana je izrazom (1.70)



Slika 1.6: Sustav dva štapa. Kraj gornjeg štapa je fiksiran u ishodištu nepomičnog sustava, dok je ishodište pomičnog sustava smješteno na spojnici štapova.

$$\vec{v}'_{c.m.} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{c.m.}. \tag{1.91}$$

Ishodište pomičnog sustava nalazi se u točki A pa je $\vec{V}$ brzina točke A. Položaj centra mase u odnosu na ishodište pomičnog sustava

$$\vec{r}_{c.m.} = (x_{c.m.} - x_A)\,\vec{i}' + (y_{c.m.} - y_A)\,\vec{j}' = \frac{l}{2}\sin\phi\vec{i}' - \frac{l}{2}\cos\phi\vec{j}'. \tag{1.92}$$

Štap se njiše u ravnini pa samo z komponenta kutne brzine može biti različita od nule

$$\vec{\Omega} \times \vec{r}_{c.m.} = \Omega\vec{k}' \times \left(\frac{l}{2}\sin\phi\vec{i}' - \frac{l}{2}\cos\phi\vec{j}'\right) = \frac{l\Omega}{2}\left(\sin\phi\vec{j}'\cos\phi\vec{i}'\right). \tag{1.93}$$

Brzina ishodišta pomičnog sustava

$$\vec{V} = \dot{x}'_A\vec{i}' + \dot{y}'_A\vec{j}' = l\cos\theta\dot{\theta}\vec{i}' + l\sin\theta\dot{\theta}\vec{j}'. \tag{1.94}$$

Brzina centra mase

$$\vec{v}_{c.m.} = \dot{x}'_{c.m.}\vec{i}' + \dot{y}'_{c.m.}\vec{j}' = l\left(\cos\theta\dot{\theta} + \frac{\dot{\phi}}{2}\cos\phi\right)\vec{i}' + l\left(\sin\theta\dot{\theta} + \frac{\dot{\phi}}{2}\sin\phi\right)\vec{j}'. \tag{1.95}$$

Izjednačimo komponente u jedn. (1.91) i usporedimo izraze uz jedinične vektore

- komponenta uz $\vec{i}'$

$$l\left(\cos\theta\dot{\theta} + \frac{\dot{\phi}}{2}\cos\phi\right) = l\cos\theta\dot{\theta} + \frac{l\Omega}{2}\cos\theta \Longrightarrow \Omega = \dot{\phi}. \tag{1.96}$$

- komponenta uz $\vec{j}'$

$$l\left(\sin\theta\dot{\theta}+\frac{\dot{\phi}}{2}\sin\phi\right)=l\sin\theta\dot{\theta}+\frac{l\Omega}{2}\sin\theta\Longrightarrow\Omega=\dot{\phi}. \tag{1.97}$$

Kraj donjeg štapa giba se brzinom

$$\vec{V}=l\cos\theta\dot{\theta}\vec{i}'+l\sin\theta\dot{\theta}\vec{j}', \tag{1.98}$$

dok štap istovremeno rotira oko tog kraja kutnom brzinom $\dot{\phi}$. Ova dva primjera ilustriraju činjenicu da brzina translacije ishodišta pomičnog sustava ovisi o položaju njegovog ishodišta, dok kutna brzina rotacije krutog tijela ne ovisi o položaju ishodišta pomičnog sustava.

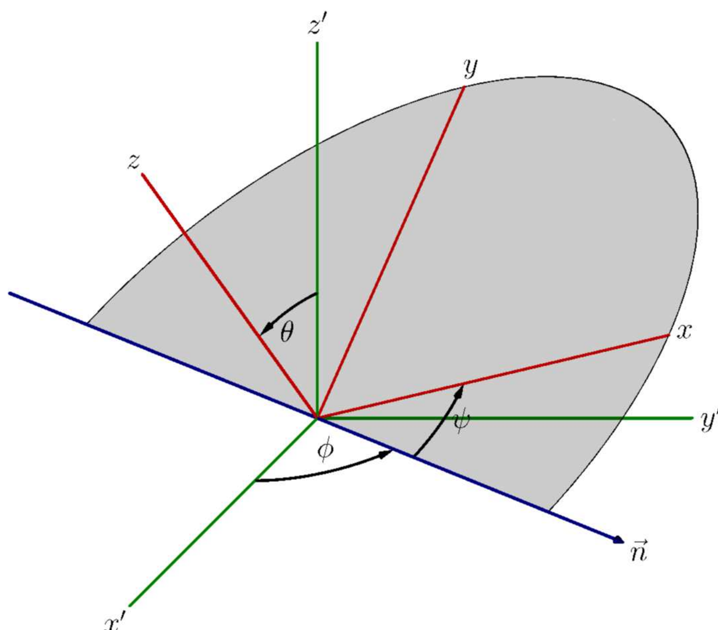
1.3 Eulerovi kutevi

1.3.1 Definicija Eulerovih kuteva

Kvantitativna analiza gibanja krutog tijela zahtjeva uvođenje parametrizacije trenutnog usmjerenja osiju pokretnog sustava S (xyz) naspram nepokretnog sustava S' ($x'y'z'$). Pretpostavimo li da sustavi S i S' imaju zajedničko ishodište, možemo ih povezati matricom rotacije a. Devet elemenata matrice transformacije a_{ij} ne možemo koristiti kao generalizirane koordinate jer svih devet nije nezavisno. Uvjet ortogonalnosti matrice $aa^T=1$ vodi na šest linearnih jednadžbi pa od devet koeficijenata a_{ij} preostaju samo tri nezavisna. Jedan mogući izbor parametrizacije matrice transformacije čine tri Eulerova kuta ϕ, θ i ψ, definirana na sljedeći način

1. Kut θ: kut između pokretne osi z i nepokretne osi z'
2. Čvorni pravac $\vec{n}$: presjecište ravnine xy pokretnog sustava i ravnine $x'y'$ nepokretnog sustava.
3. Kut ϕ: kut između osi x' nepokretnog sustava i čvornog pravca $\vec{n}$.
4. Kut ψ: kut između čvornog pravca $\vec{n}$ i osi x pokretnog sustava.

Čvorni pravac leži u ravninama xy i $x'y'$ (točnije, definira njihovo presjecište) pa je uvijek okomit na pokretnu os z i nepokretnu os z'. Pozitivan smjer čvornog pravca definiramo kao smjer vektorskog produkta $\vec{k}'\times\vec{k}$, pri čemu su $\vec{k}$ i $\vec{k}'$ jedinični vektori osiju z i z'. Pozitivni smjer promjene kuta ϕ definiran je pravilom desne ruke (palac



Slika 1.7: Definicija Eulerovih kuteva. θ odgovara kutu između pokretne osi z i nepokretne osi z'. Čvorni pravac definiran je kao presjecište nepokretne ravnine $x'y'$ i pokretne ravnine xy. ϕ je kut između nepokretne osi x' i čvornog pravca, dok je ψ kut između čvornog pravca i osi x.

ima smjer osi z'), kao i pozitivni smjer promjene kuta ψ (palac ima smjer osi z). Kut θ je definiran na intervalu $[0, \pi]$, dok su kutevi ϕ i ψ definirani na intervalu $[0, 2\pi]$.

Pretpostavimo da se pomični sustav zarotirao za infinitezimalni kut opisan pomacima $d\phi$, $d\theta$ i $d\phi$. Želimo izvesti odgovarajuće komponente kutne brzine u pomičnom sustavu.

Pomak $d\theta$

Promjena kuta $d\theta$ odgovara rotaciji oko čvornog pravca koji leži u ravnini xy pa promjena nema komponentu u smjeru jediničnog vektora $\vec{k}$

$$d\vec{\theta} = d\theta \cos\psi \vec{i} + d\theta \cos(\psi + \pi/2)\vec{j}. \quad (1.99)$$

Odgovarajuće komponente kutne brzine glase

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi, \quad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi, \quad \dot{\theta}_3 = 0. \quad (1.100)$$

Pomak $d\psi$

Promjena kuta $d\psi$ odgovara rotaciji oko osi z pa doprinosi samo komponeta 3

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = \dot{\psi}. \tag{1.101}$$

Pomak $d\phi$

Promjena kuta $d\phi$ odgovara rotaciji oko osi z' nepomičnog sustava. Raspišemo li vektor $\vec{k}'$ u sustavu xyz

$$\vec{k}' = \cos\theta d\phi \vec{k} + \sin\theta \sin\psi d\phi \vec{i} + \sin\theta \cos\psi d\phi \vec{j}, \tag{1.102}$$

možemo pročitati komponente pomaka $d\vec{\phi}$

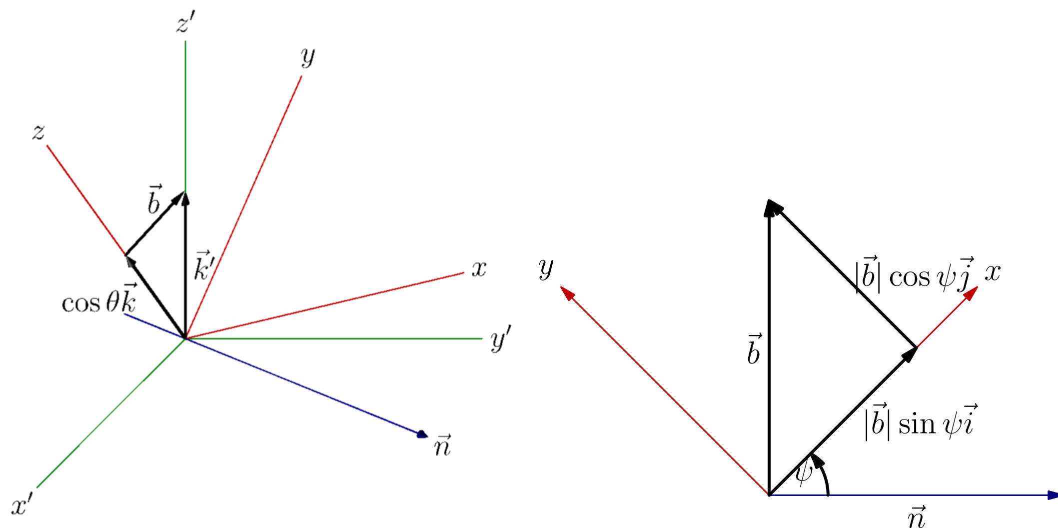
$$\dot{\phi}_1 = \sin\theta \sin\phi \dot{\phi}, \quad \dot{\phi}_2 = \sin\theta \cos\psi \dot{\phi}, \quad \dot{\phi}_3 = \cos\theta \dot{\phi}. \tag{1.103}$$

Komponente kutne brzine u pomičnom sustavu, parametrizirane pomoću Eulerovih kuteva

$$\Omega_1 = \cos\psi \dot{\theta} + \sin\theta \sin\psi \dot{\phi}, \tag{1.104}$$

$$\Omega_2 = -\sin\psi \dot{\theta} + \sin\theta \cos\psi \dot{\phi}, \tag{1.105}$$

$$\Omega_3 = \dot{\psi} + \cos\theta \dot{\phi}. \tag{1.106}$$



Slika 1.8: Rastavljanje jediničnog vektora $\vec{k}'$ nepomičnog sustava na jedinične vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ pomičnog sustava. Pomoćni vektor $\vec{b}$ leži u xy ravnini i okomit je na čvorni pravac.

1.3.2 Parametrizacija matrice rotacije pomoću Eulerovih kuteva

Ukupnu rotaciju napisat ćemo kao kompoziju tri elementarne rotacije zadane matricama B, C i D. Matrica ukupne transformacije jednaka je produktu tri matrice

$$a = BCD. \tag{1.107}$$

Nepomični sustav S' transformiramo u prvi pomoćni sustav S_1 transformacijom D, zatim sustav S_1 transformiramo u drugi pomoćni sustav S_2 transformacijom C i konačno sustav S_2 transformiramo u konačni rotirani sustav S transformacijom B. Koristit ćemo sljedeće oznake

- nepomični sustav: x', y', z'
- rotirani sustav: x, y, z
- prvi pomoćni sustav: x_1, y_1, z_1
- drugi pomoćni sustav: x_2, y_2, z_2

Prva transformacija: rotacija za kut ϕ oko osi z' nepomičnog sustava S'

Osi z' i z_1 se poklapaju jer početni sustav rotiramo oko osi z' Jedinični vektori u dva sustava vezani su sljedećim relacijama

$$\vec{i}_1 = (\vec{i}_1 \cdot \vec{i}')\vec{i}' + (\vec{i}_1 \cdot \vec{j}')\vec{j}' = \vec{i}' \cos\phi + \vec{j}' \cos(90^0 - \phi) \tag{1.108}$$

$$\vec{i}_1 = \vec{i}' \cos\phi + \vec{j}' \sin\phi \tag{1.109}$$

$$\vec{j}_1 = (\vec{j}_1 \cdot \vec{i}')\vec{i}' + (\vec{j}_1 \cdot \vec{j}')\vec{j}' = \vec{i}' \cos(90^0 + \phi) + \vec{j}' \cos\phi \tag{1.110}$$

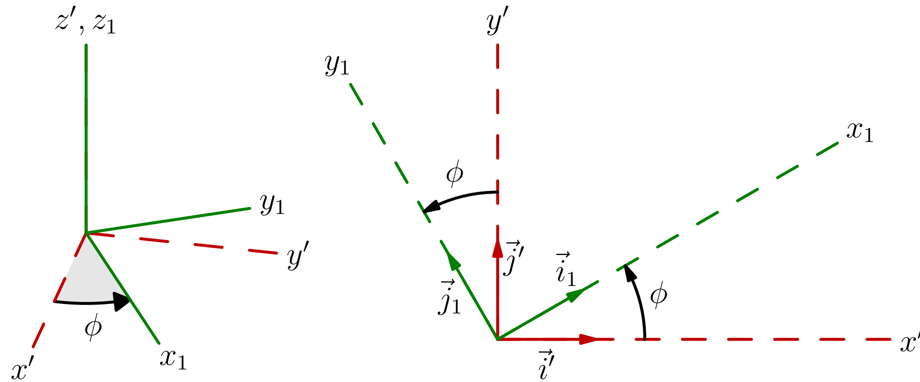
$$\vec{j}_1 = -\vec{i}' \sin\phi + \vec{j}' \cos\phi. \tag{1.111}$$

Jedinični vektor $\vec{k}'$ se ne mijenja jer sustav rotiramo oko osi z'. Ukupna transformacija glasi

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{pmatrix}. \tag{1.112}$$

Prva matrica transformacije

$$D = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.113}$$



Slika 1.9: Lijevo: Rotacija oko osi z' nepomičnog sustava za kut ϕ. Desno: Projekcija rotacije oko osi z' nepomičnog sustava na ravninu $x'y'$.

Druga transformacija: rotacija za kut θ oko osi x_1 pomoćnog sustava S_1

Osi x_1 i x_2 se poklapaju jer sustav S_1 rotiramo oko osi x_1. Jedinični vektori u dva sustava vezani su sljedećim relacijama

$$\vec{j}_2 = (\vec{j}_2 \cdot \vec{j}_1)\vec{j}_1 + (\vec{j}_2 \cdot \vec{k}_1)\vec{k}_1$$

$$\vec{j}_2 = \vec{j}_1 \cos\theta + \vec{k}_1 \cos(90^0 - \theta) \tag{1.114}$$

$$\vec{j}_2 = \vec{j}_1 \cos\theta + \vec{k}_1 \sin\theta \tag{1.115}$$

$$\vec{k}_2 = (\vec{k}_2 \cdot \vec{j}_1)\vec{j}_1 + (\vec{k}_2 \cdot \vec{k}_1)\vec{k}_1$$

$$\vec{k}_2 = \vec{j}_1 \cos(90^0 + \theta) + \vec{k}_1 \cos\theta \tag{1.116}$$

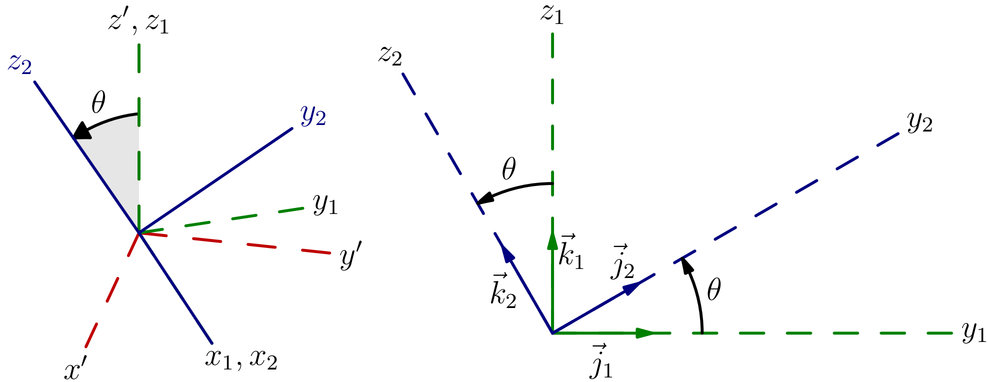
$$\vec{k}_2 = -\vec{j}_1 \sin\theta + \vec{k}_1 \cos\theta \tag{1.117}$$

Jedinični vektor $\vec{i}_1$ se ne mijenja jer sustav rotiramo oko osi x_1. Ukupna transformacija glasi

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix}. \tag{1.118}$$

Druga matrica transformacije

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1.119}$$



Slika 1.10: Lijevo: Rotacija oko osi x_1 pomoćnog sustava S_1 za kut θ. Desno: Projekcija rotacije oko osi x_1 pomoćnog sustava S_1 na ravninu $y_1 z_1$.

Treća transformacija: rotacija za kut ψ oko osi z_2 pomoćnog sustava S_2

Osi z_2 i z se poklapaju jer sustav S_2 rotiramo oko osi z_2. Jedinični vektori u dva sustava vezani su sljedećim relacijama

$$\vec{i} = (\vec{i} \cdot \vec{i}_2)\vec{i}_2 + (\vec{i} \cdot \vec{j}_2)\vec{j}_2 = \vec{i}_2 \cos\psi + \vec{j}_2 \cos(90^0 - \psi) \tag{1.120}$$

$$\vec{i} = \vec{i}_2 \cos\psi + \vec{j}_2 \sin\psi \tag{1.121}$$

$$\vec{j} = (\vec{j} \cdot \vec{i}_2)\vec{i}_2 + (\vec{j} \cdot \vec{j}_2)\vec{j}_2 = \vec{i}_2 \cos(90^0 + \psi) + \vec{j}_2 \cos\psi \tag{1.122}$$

$$\vec{j} = -\vec{i}_2 \sin\psi + \vec{j}_2 \cos\psi \tag{1.123}$$

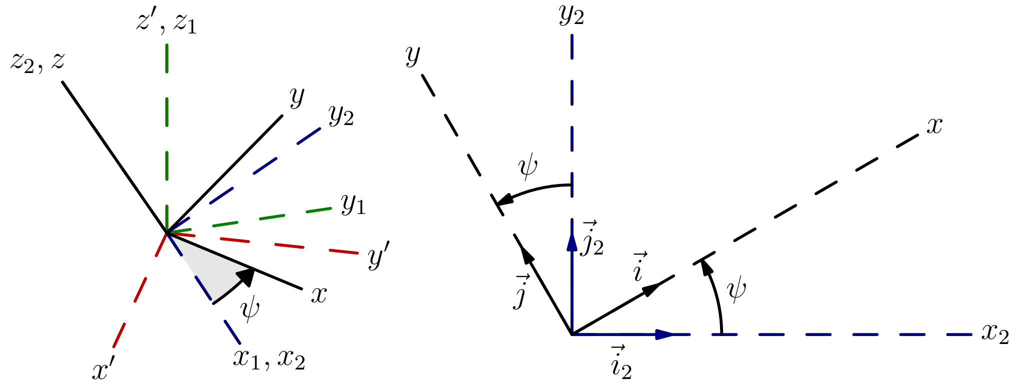
Jedinični vektor $\vec{k}_2$ se ne mijenja jer sustav S_2 rotiramo oko osi z_2. Ukupna transformacija glasi

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix}. \tag{1.124}$$

Treća matrica transformacije glasi

$$B = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.125}$$

Množenje matrica B, C i D daje ukupnu transformaciju $A = BCD$.



Slika 1.11: Lijevo: Rotacija oko osi z_2 pomoćnog sustava S_2 za kut ψ. Desno: Projekcija rotacije oko osi z_2 pomoćnog sustava S_2 na ravninu x_2y_2.

$$\begin{aligned}\vec{i} &= (\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi)\,\vec{i}' \\ &+ (\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\sin\psi)\,\vec{j}' \\ &+ \sin\theta\sin\psi\vec{k}', \end{aligned} \tag{1.126}$$

$$\begin{aligned}\vec{j} &= -\,(\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\theta\cos\psi)\,\vec{i}' \\ &+ (-\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi)\,\vec{j}' \\ &+ \sin\theta\cos\psi\vec{k}', \end{aligned} \tag{1.127}$$

$$\vec{k} = \sin\phi\sin\theta\vec{i}' - \cos\phi\sin\theta\vec{j}' + \cos\theta\vec{k}'. \tag{1.128}$$

Inverznu transformaciju dobijemo transponiranjem matrice A

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= (\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi)\,\vec{i} \\ &- (\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\theta\cos\psi)\,\vec{j} \\ &+ \sin\phi\sin\theta\vec{k}, \end{aligned} \tag{1.129}$$

$$\begin{aligned}\vec{j}' &= (\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\sin\psi)\,\vec{i} \\ &+ (-\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi)\,\vec{j} \\ &- \cos\phi\sin\theta\vec{k}, \end{aligned} \tag{1.130}$$

$$\vec{k}' = \sin\theta\sin\psi\vec{i} + \sin\theta\cos\psi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}. \tag{1.131}$$

1.3.3 Kutna brzina i Eulerovi kutevi

Kutna brzina ima tri doprinosa

- rotacija oko osi $\vec{k}'$ brzinom $\dot{\phi}$

- rotacija oko osi $\vec{i}_1$ brzinom $\dot{\theta}$
- rotacija oko osi $\vec{k}$ brzinom $\dot{\psi}$

Vektor kutne brzine možemo napisati kao zbroj ta tri vektora

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi}\vec{k}' + \dot{\theta}\vec{i}_1 + \dot{\psi}\vec{k}. \tag{1.132}$$

Prvo računamo komponente kutne brzine u bazi nepomičnog sustava. Izraz (1.132) moramo svesti na oblik

$$\vec{\Omega} = \Omega_{x'}\vec{i}' + \Omega_{y'}\vec{j}' + \Omega_{z'}\vec{k}'. \tag{1.133}$$

Raspišemo jedinične vektore $\vec{i}_1$ i $\vec{k}$ pomoću jediničnih vektora nepomičnog sustava $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ i $\vec{k}'$. Iz prethodnih razmatranja znamo

$$\vec{i}_1 = \vec{i}' \cos\phi + \vec{j}' \sin\phi \tag{1.134}$$

$$\vec{k} = \sin\phi \sin\theta \vec{i}' - \cos\phi \sin\theta \vec{j}' + \cos\theta \vec{k}'. \tag{1.135}$$

Računamo vektor kutne brzine

$$\begin{aligned}
\vec{\Omega} &= \dot{\phi}\vec{k}' + \dot{\theta}\left(\vec{i}' \cos\phi + \vec{j}' \sin\phi\right) \\
&\quad + \dot{\psi}\left(\sin\phi \sin\theta \vec{i}' - \cos\phi sin\theta \vec{j}' + \cos\theta \vec{k}'\right), \\
\vec{\Omega} &= \left(\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta \sin\phi\right)\vec{i}' \\
&\quad + \left(\dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi\right)\vec{j}' \\
&\quad + \left(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta\right)\vec{k}'.
\end{aligned} \tag{1.136}$$

Komponente kutne brzine u fiksnom sustavu iznose

$$\Omega_{x'} = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi, \tag{1.137}$$

$$\Omega_{y'} = \dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi, \tag{1.138}$$

$$\Omega_{z'} = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta. \tag{1.139}$$

Koristeći matricu rotacije kutnu brzinu Ω možemo transformirati u bazu sustava vezanog uz tijelo

$$\begin{aligned}
\vec{\Omega} &= \left(\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right)\vec{i} \\
&\quad + \left(\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi\right)\vec{j} \\
&\quad + \left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)\vec{k}.
\end{aligned} \tag{1.140}$$

Kompnente kutne brzine u pomičnom sustavu

$$\Omega_x = \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi, \tag{1.141}$$

$$\Omega_y = \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi, \tag{1.142}$$

$$\Omega_z = \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}. \tag{1.143}$$

2 Tenzor tromosti krutog tijela

2.1 Kinetička energija krutog tijela

Promatramo kruto tijelo sastavljeno od točkastih čestica. Masu n-te čestice označimo s m_n, a njezin vektor položaja s $\vec{r}_n$. Zbroj kinetičkih energija svih pojedinih čestica daje ukupnu kinetičku energiju krutog tijela

$$T = \sum_n \frac{m_n}{2} \left(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_n \right)^2 . \tag{2.1}$$

Svojstva tromosti krutog tijela najjednostavnije opisujemo u sustavu s ishodištem u centru mase krutog tijela. Neka je $x'y'z'$ nepomični sustav, a xyz sustav vezan uz kruto tijelo s ishodištem u točki O. Definiramo koordinatni sustav čije su osi paralelne osima sustava xyz, a ishodište mu se nalazi u centru mase krutog tijela. Označimo s $\vec{a}$ položaj centra mase u odnosu na točku O. Vezu vektora $\vec{r}_n$ i $\vec{\rho}_n$ možemo pročitati sa sl. 2.1

$$\vec{r}_n = \vec{\rho}_n + \vec{a}. \tag{2.2}$$

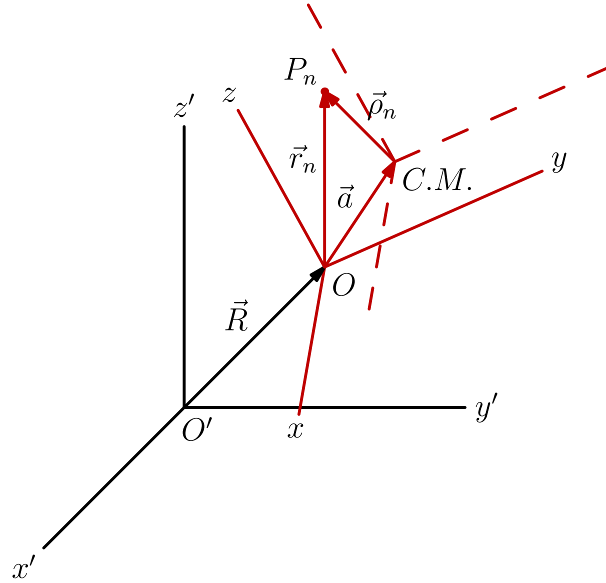
Uvrstimo jedn. (2.2) u izraz za kinetičku energiju

$$T = \sum_n \frac{m_n}{2} \left[\vec{V} + \vec{\Omega} \times (\vec{\rho}_n + \vec{a}) \right]^2 . \tag{2.3}$$

Kvadriranjem dolazimo do šest članova

$$\begin{aligned} T &= \sum_n \frac{m_n}{2} \left[\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{a} + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}_n \right]^2 \\ &= \sum_n \frac{m_n}{2} \vec{V}^2 + \sum_n \frac{m_n}{2} \left(\vec{\Omega} \times \vec{a} \right)^2 + \sum_n \frac{m_n}{2} \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}_n \right)^2 \\ &+ \sum_n m_n \vec{V} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{a} \right) + \sum_n m_n \vec{V} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}_n \right) \\ &+ \sum_n m_n \left(\vec{\Omega} \times \vec{a} \right) \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}_n \right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Promotrimo pojedine članove uzimajući u obzir da ukupna masa krutog tijela iznosi μ.



Slika 2.1: Nepomični sustav $x'y'z'$, sustav vezan uz kruto tijelo xyz i sustav s ishodištem u centru mase krutog tijela.

Prvi član

Brzina translacije $\vec{V}$ je ista za sve čestice pa sumiramo samo po masama pojedinih čestica. Kao rezultat dobijemo ukupnu kinetičku energiju translacije krutog tijela

$$\sum_n \frac{1}{2} m_n \vec{V}^2 = \frac{1}{2}\mu \vec{V}^2. \tag{2.5}$$

Drugi član

Kao i u prvom članu, faktor $\left(\vec{\Omega} \times \vec{a}\right)^2$ je isti za sve čestice pa sumiramo samo po masama čestica

$$\sum_n \frac{m_n}{2}\left(\vec{\Omega} \times \vec{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\vec{\Omega} \times \vec{a}\right)^2. \tag{2.6}$$

Treći član

Ovaj član je nešto složeniji, a najjednostavnije ćemo ga izračunati koristeći Levi-Civita simbol.

$$\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}_n\right)^2=\sum_k\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}_n\right)_k\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}_n\right)_k \tag{2.7}$$

$$\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}_n\right)^2=\sum_k\left(\sum_{ij}\Omega_i\rho_{n,j}\epsilon_{ijk}\right)\left(\sum_{pq}\Omega_p\rho_{n,q}\epsilon_{pqk}\right) \tag{2.8}$$

$$\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}_n\right)^2=\sum_{ijpq}\Omega_i\Omega_p\rho_{n,j}\rho_{n,q}\sum_k\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} \tag{2.9}$$

$$\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}_n\right)^2=\sum_{ijpq}\Omega_i\Omega_p\rho_{n,j}\rho_{n,q}\left(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp}\right) \tag{2.10}$$

$$\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}_n\right)^2=\sum_i\Omega_i^2\vec{\rho}_n^{\,2}-\sum_{ij}\Omega_i\Omega_j\rho_{n,j}\rho_{n,i} \tag{2.11}$$

$$\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}_n\right)^2=\sum_{ij}\Omega_i\Omega_j\left(\delta_{ij}\vec{\rho}_n^{\,2}-\rho_{n,i}\rho_{n,j}\right). \tag{2.12}$$

Na kraju još sumiramo po svim česticama

$$\Longrightarrow\sum_n\frac{m_n}{2}\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}_n\right)^2=\sum_n\frac{m_n}{2}\sum_{ij}\Omega_i\Omega_j\left(\delta_{ij}\vec{\rho}_n^{\,2}-\rho_{n,i}\rho_{n,j}\right) \tag{2.13}$$

Četvrti član

Kao i u prva dva člana faktor $\vec{V}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{a}\right)$ je zajednički za cijelo kruto tijelo pa sumiramo samo po masama pojedinih čestica

$$\sum_n m_n\vec{V}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{a}\right)=\mu\vec{V}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{a}\right). \tag{2.14}$$

Peti član

Ovdje možemo iskoristiti definiciju centra mase

$$\sum_n m_n\vec{\rho}_n=0, \tag{2.15}$$

pa ovaj član zapravo ne doprinosi kinetičkoj energiji

$$\sum_n m_n \vec{V} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}_n\right) = \vec{V} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \sum_n m_n \vec{\rho}_n\right) = 0. \tag{2.16}$$

Šesti član

Kao i u prethodnom slučaju, iskoristimo definiciju centra mase. Ni ovaj član ne daje doprinos u kinetičkoj energiji

$$\sum_n m_n \left(\vec{\Omega} \times \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}_n\right) = \left(\vec{\Omega} \times \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{\Omega} \times \sum_n m_n \vec{\rho}_n\right) = 0. \tag{2.17}$$

Korisno je primjetiti da drugi član možemo napisati i u sljedećem obliku

$$\frac{\mu}{2} \left(\vec{\Omega} \times \vec{a}\right)^2 = \frac{\mu}{2} \sum_{ij} \Omega_i \Omega_j \left(\delta_{ij} \vec{a}^2 - a_i a_j\right). \tag{2.18}$$

Kinetička energija krutog tijela sastoji se od translatornog, rotacionog i mješovitog doprinosa

$$T = \frac{1}{2} \mu \vec{V}^2 + \mu \vec{V} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{a}\right) + \frac{\mu}{2} \left(\vec{\Omega} \times \vec{a}\right)^2 + \sum_n \frac{m_n}{2} \sum_{ij} \Omega_i \Omega_j \left(\delta_{ij} \vec{\rho}_n^2 - \rho_{n,i} \rho_{n,j}\right). \tag{2.19}$$

2.2 Definicija tenzora tromosti krutog tijela

Skup od devet veličina definiranih kao

$$I_{ij} \equiv \sum_n m_n \left(\vec{r}_n^2 \delta_{ij} - r_{n,i} r_{n,j}\right), \tag{2.20}$$

zovemo tenzor tromosti krutog tijela s obzirom na točku O. Prvo moramo provjeriti da li se veličine I_{ij} s obzirom na rotacije doista transformiraju kao komponente tenzora. Rotacija je definirana matricom ortognalne transformacije

$$r'_i = \sum_k a_{ik} r_k. \tag{2.21}$$

Tenzor inercije u transformiranom sustavu glasi

$$I'_{ij} = \sum_n m_n \left(\vec{r}_n'^2 \delta_{ij} - r'_{n,i} r'_{n,j}\right). \tag{2.22}$$

Duljina vektora je invarijantna na rotacije pa vrijedi

$$\vec{r}_n'^2 = \vec{r}_n^2. \tag{2.23}$$

Promotrimo drugi član u tenzoru

$$r'_{n,i} r'_{n,j} = \sum_k a_{ik} r_{n,k} \sum_l a_{jl} r_{n,l} = \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} r_{n,k} r_{n,l}. \tag{2.24}$$

Iskoristimo uvjet ortogonalnosti matrice a

$$\sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} \Longrightarrow \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} = \delta_{ij}. \tag{2.25}$$

Jednažbu transformacije tenzora možemo napisati kao

$$I'_{ij} = \sum_n m_n \left[\sum_{kl} \vec{r}_n^2 a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} - \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} r_{n,k} r_{n,l} \right]. \tag{2.26}$$

Promjenimo poredak sumacija

$$I'_{ij} = \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} \sum_n m_n \left[\vec{r}_n^2 - r_{n,k} r_{n,l} \right] = \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} I_{kl}. \tag{2.27}$$

Veličine I_{ij} se, s obzirom na rotacije, transformiraju kao produkti komponenti vektora pa se doista radi o tenzoru ranga 2.

2.2.1 Svojstva tenzora tromosti

Promotrimo pojedine elemente tenzora tromosti

$$I_{ij} = \sum_n m_n \left[\vec{r}_n^2 \delta_{ij} - r_{n,i} r_{n,j} \right]. \tag{2.28}$$

U dijagonalnim elementima Kroneckerov simbol daje vrijednost 1

$$I_{ii} = \sum_n m_n \left[\vec{r}_n^2 - r_{n,i}^2 \right]. \tag{2.29}$$

Pojedini dijagonalni elementi glase

$$I_{xx} = \sum_n m_n \left[x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 - x_n^2 \right] = \sum_n m_n \left[y_n^2 + z_n^2 \right], \tag{2.30}$$

$$I_{yy} = \sum_n m_n \left[x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 - y_n^2 \right] = \sum_n m_n \left[x_n^2 + z_n^2 \right], \tag{2.31}$$

$$I_{zz} = \sum_n m_n \left[x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 - z_n^2 \right] = \sum_n m_n \left[x_n^2 + y_n^2 \right], \tag{2.32}$$

(2.33)

i uvijek su pozitivni. U nedijagonalnim elementima Kroneckerov simbol nestaje

$$I_{ij} = -\sum_n m_n r_{n,i} r_{n,j}. \tag{2.34}$$

Pojedini nedijagonalni elementi glase

$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_n m_n x_n y_n, \tag{2.35}$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\sum_n m_n z_n y_n, \tag{2.36}$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\sum_n m_n x_n z_n, \tag{2.37}$$

a mogu biti pozitivni ili negativni. Tenzor tromosti možemo napisati u obliku simetrične matrice.

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Ako tijelo možemo tretirati kao kontinuiranu raspodjelu masu, sumacija po točkastim masama prelazi u integraciju po volumenu

$$m_n \to \rho(\vec{r})\, d^3r \quad \text{i} \quad \sum_n \cdots \to \int \cdots d^3r, \tag{2.39}$$

gdje $\rho(\vec{r})$ označava gustoću krutog tijela. Tenzor tromosti glasi

$$I_{ij} = \int \rho(\vec{r}) \left[\vec{r}^2 \delta_{ij} - r_i r_j\right]. \tag{2.40}$$

Primjer: tanka ploča

Poseban slučaj je dvodimenzionalno tijelo (tanka ploča). Koordinatni sustav orijentiramo tako da ploča leži u xy ravnini. Gustoća ploče iščezava za sve vrijednosti $z \neq 0$ pa je možemo napisati ako produkt δ funkcije i plošne gustoće ploče

$$\rho(x, y, z) = \sigma(x, y)\delta(z). \tag{2.41}$$

Plošnu gustoću definiramo kao omjer mase i površine tijela (jedinica kgm^{-2})

$$\sigma(x, y) = \frac{\text{masa tijela}}{\text{površina tijela}}. \tag{2.42}$$

Integracija jedn. (2.41) daje ukupnu masu ploče

$$\int \sigma(x,y)\delta(z)dxdydz = \int \sigma(x,y)dxdy \int \delta(z)dz = \int \sigma(x,y)dxdy = \mu. \quad (2.43)$$

Dijagonalni elementi tenzora tromosti tanke ploče

$$I_{xx} = \int \sigma(x,y)\left(y^2+z^2\right)\delta(z)dxdydz = \int \sigma(x,y)y^2dxdy \quad (2.44)$$

$$I_{yy} = \int \sigma(x,y)\left(x^2+z^2\right)\delta(z)dxdydz = \int \sigma(x,y)x^2dxdy \quad (2.45)$$

$$I_{zz} = \int \sigma(x,y)\left(x^2+y^2\right)\delta(z)dxdydz = \int \sigma(x,y)\left(x^2+y^2\right)dxdy. \quad (2.46)$$

Uočimo da je tanku ploču smještenu u xy ravnini vrijedi

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}. \quad (2.47)$$

Prethodnu relaciju nazivamo teorem o okomitim osima. Jedini nedijagonalni element tenzora tromosti tanke ploče različit od nule je I_{xy}

$$I_{xy} = -\int \sigma(x,y)\delta(z)xydxdydz = -\int \sigma(x,y)xydxdy. \quad (2.48)$$

Primjer: tanki štap

Sljedeći zanimljiv slučaj je tanki štap čija se masa nalazi na pravcu. Koordinatni sustav orijentiramo tako da štap leži duž osi z. Gustoća štapa iščezava za sve vrijednosti $x, y \neq 0$ pa je možemo napisati ako produkt δ funkcija u smjerovima x i y i linijske gustoće štapa

$$\rho(x,y,z) = \lambda(z)\delta(x)\delta(y). \quad (2.49)$$

Linijsku gustoću definiramo kao omjer mase i dužine tijela (jedinica kgm^{-1})

$$\lambda(z) = \frac{\text{masa tijela}}{\text{dužina tijela}}. \quad (2.50)$$

Integracija jedn. (2.49) daje ukupnu masu štapa

$$\int \lambda(z)\delta(x)\delta(y)dxdydz = \int \lambda(z)dz \int \delta(x)dx \int \delta(y)dy = \int \lambda(z)dz = \mu. \quad (2.51)$$

Dijagonalni elementi tenzora tromosti tankog štapa

$$I_{xx} = \int \lambda(z)\left(y^2+z^2\right)\delta(x)\delta(y)dxdydz = \int \lambda(z)z^2dz \tag{2.52}$$

$$I_{yy} = \int \lambda(z)\left(x^2+z^2\right)\delta(x)\delta(y)dxdydz = \int \lambda(z)z^2dz \tag{2.53}$$

$$I_{zz} = \int \lambda(z)\left(x^2+y^2\right)\delta(x)\delta(y)dxdydz = 0. \tag{2.54}$$

Svi nedijagonalni članovi tenzora tromosti tankog štapa propadaju, kao i dijagonalni član I_{zz}. Tanki štap ima samo pet stupnjeva slobode jer rotacija oko osi z gubi smisao.

2.3 Steinerov teorem

Steinerov teorem koristimo da bi povezali elemente tenzora tromosti definiranog s obzirom na centar mase i elemente tenzora tromosti definiranog s obzirom na proizvoljnu točku O. Polazimo od tenzora definiranog s obzirom na točku O

$$I_{ij} = \sum_n m_n\left[\vec{r}_n^{\,2}\delta_{ij} - r_{n,i}r_{n,j}\right]. \tag{2.55}$$

Iskoristimo relaciju $\vec{r}_n = \vec{\rho}_n + \vec{a}$

$$I_{ij} = \sum_n m_n\left[\left(\vec{\rho}_n^{\,2} + 2\vec{\rho}_n\cdot\vec{a} + \vec{a}^2\right)\delta_{ij} - \rho_{n,i}\rho_{n,j} - \rho_{n,i}a_j - a_i\rho_{n,j} - a_ia_j\right] \tag{2.56}$$

$$= 2\vec{a}\cdot\sum_n m_n\vec{\rho}_n\delta_{ij} - a_j\sum_n m_n\rho_{n,i} - a_i\sum_n m_n\rho_{n,j} \tag{2.57}$$

$$+ \sum_n m_n\left[\vec{\rho}_n^{\,2}\delta_{ij} - \rho_{n,i}\rho_{n,j}\right] + \sum_n m_n\left[\vec{a}^2\delta_{ij} - a_ia_j\right]. \tag{2.58}$$

Prva tri člana propadaju zbog definicije centra mase

$$\sum_n m_n\vec{\rho}_n = 0. \tag{2.59}$$

Četvrti član predstavlja definiciju tenzora inercije s obzirom na centar mase, dok u zadnjem članu sumacija po svim česticama daje ukupnu masu krutog tijela. Dakle, Steinerov teorem (teorem o paralelnim osima) glasi

$$I_{ij} = I_{ij}^{\text{c.m.}} + \mu\left[\vec{a}^2\delta_{ij} - a_ia_j\right]. \tag{2.60}$$

Kinetičku energiju krutog tijela možemo napisati kao

$$T = \frac{1}{2}\mu\vec{V}^2 + \mu\vec{V}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{a}\right) + \frac{1}{2}\sum_{ij} I_i I_j \Omega_i \Omega_j. \tag{2.61}$$

Prvi član potječe od translacije, treći od rotacije, dok je drugi član mješovit. Jedn. (2.61) se pojednostavljuje u dva slučaja:

- os rotacije prolazi kroz centar mase:
  Vektor $\vec{a}$ nestaje, a zajedno s njim i mješoviti član u kinetičkoj energiji. Translatorni i rotacioni doprinosi su separirani tj. kinetička energija je suma energije translacije i rotacije.
- točka O miruje:
  U jedn. (2.61) preostaje samo zadnji član. Kinetička energija se svodi na energiju rotacije.

2.4 Glavne osi tenzora tromosti

Simetričan tenzor ranga 2 uvijek možemo prevesti u dijagonalni oblik pogodnim izborom koordinatnih osi. Pretpostavimo da u početnom sustavu xyz tenzor tromosti I_{ij} ima nedijagonalne elemente. Postoji rotacija koja sustav xyz transformira u sustav $x'y'z'$, takav da je tenzor tromosti I'_{ij} dijagonalan. Traženu transformaciju možemo opisati ortogonalnom matricom a

$$r'_i = \sum_k a_{ik} r_k. \tag{2.62}$$

Komponente tenzora se transformiraju kao produkti komponenti vektora

$$I'_{ij} = \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} I_{kl} = \sum_{kl} a_{ik} a^T_{lj} I_{kl}. \tag{2.63}$$

Prethodna relacija zapravo predstavlja produkt tri matrice

$$I'_{ij} = \left[aIa^T\right]_{ij} \Longrightarrow I' = aIa^T. \tag{2.64}$$

Pomnožimo jedn. (2.64) matricom a^T s lijeve strane i iskoristimo uvjet ortogonalnosti matrice a ($aa^T = a^T a = 1$)

$$a^T I' = a^T a I a^T = I a^T. \tag{2.65}$$

Prema početnoj pretpostavci, tenzor tromosti u sustavu $x'y'z'$ je dijagonalan tj. matrica I' je dijagonalna. Označimo elemente matrice I' s λ_1, λ_2 i λ_3, a j-ti stupac matrice a^T s $v^{(j)}$. Jedn. (2.65) poprima oblik problema svojstvenih vrijednosti

$$\sum_k I_{ik} v_k^{(j)} = \lambda_j v_i^{(j)} \Longrightarrow I v^{(j)} = \lambda_j v^{(j)}. \tag{2.66}$$

Svojstveni vektori $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ i $v^{(3)}$ su stupci matrice a^T

$$a_{ki}^T = v_k^{(i)} \Longrightarrow v_k^{(i)} = a_{ik}. \tag{2.67}$$

Svojstveni vektori $v^{(i)}$ definiraju jedinične vektore novog sustava

$$\vec{e}'_i = \sum_k a_{ik} \vec{e}_k = \sum_k v_k^{(i)} \vec{e}_k. \tag{2.68}$$

Osi sustava $x'y'z'$ u kojem je tenzor inercije dijagonalan zovemo glavne osi tromosti, dok momente oko tih osi zovemo glavne vrijednosti tenzora tromosti. Da bi matrica a bila ortogonalna, vektori $v^{(i)}$ moraju biti ortonormirani, odnosno mora vrijediti

$$\sum_k v_k^{(i)} v_k^{(j)} = \delta_{ij}. \tag{2.69}$$

Primjer 2.1

Za sustav na slici izračunajte tenzor inercije s obzirom na centar mase sustava ako su zadane mase čestica $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ i $m_3 = m$.

Koordinate pojedinih čestica u sustavu:

1. čestica, mase $m_1 = m$: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$,
2. čestica, mase $m_2 = 2m$: $x_2 = 2a$, $y_2 = 0$, $z_2 = 0$,
3. čestica, mase $m_3 = m$: $x_3 = 0$, $y_3 = 4a$, $z_3 = 0$.

Računamo položaj centra mase sustava

$$x_{c.m.} = \frac{\sum_n m_n x_n}{\sum_n m_n} = \frac{4am}{4m} = a, \tag{2.70}$$

$$y_{c.m.} = \frac{\sum_n m_n y_n}{\sum_n m_n} = \frac{4am}{4m} = a, \tag{2.71}$$

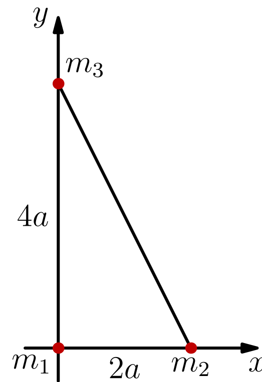
$$z_{c.m.} = \frac{\sum_n m_n z_n}{\sum_n m_n} = 0. \tag{2.72}$$

Centar mase sustava nalazi se u točki $(a, a, 0)$ pa koordinate pojedinih čestica s obzirom na centar mase glase

$$x'_1 = x_1 - x_{c.m.} = -a, \quad y'_1 = y_1 - y_{c.m.} = -a, \quad z'_1 = 0, \tag{2.73}$$

$$x'_2 = x_2 - x_{c.m.} = +a, \quad y'_2 = y_2 - y_{c.m.} = -a, \quad z'_2 = 0, \tag{2.74}$$

$$x'_3 = x_3 - x_{c.m.} = -a, \quad y'_3 = y_3 - y_{c.m.} = 3a, \quad z'_3 = 0. \tag{2.75}$$



Slika 2.2: Sustav od tri točkase čestice. Centar mase sustava nalazi se u točki $(a, a, 0)$.

Dijagonalni elementi tenzora tromosti:

$$\begin{aligned} I_{xx}^{c.m.} &= \sum_{n=1}^{3} m_n \left[{y'_n}^2 + {z'_n}^2 \right] \\ &= m_1 \left[{y'_1}^2 + {z'_1}^2 \right] + m_2 \left[{y'_2}^2 + {z'_2}^2 \right] + m_3 \left[{y'_3}^2 + {z'_3}^2 \right] \\ &= m[a^2 + 0] + 2m[a^2 + 0] + m[9a^2 + 0] = 12ma^2, \end{aligned} \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned} I_{yy}^{c.m.} &= \sum_{n=1}^{3} m_n \left[{x'_n}^2 + {z'_n}^2 \right] \\ &= m_1 \left[{x'_1}^2 + {z'_1}^2 \right] + m_2 \left[{x'_2}^2 + {z'_2}^2 \right] + m_3 \left[{x'_3}^2 + {z'_3}^2 \right] \\ &= m[a^2 + 0] + 2m[a^2 + 0] + m[a^2 + 0] = 4ma^2 \end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned} I_{zz}^{c.m.} &= \sum_{n=1}^{3} m_n \left[{x'_n}^2 + {y'_n}^2 \right] \\ &= m_1 \left[{x'_1}^2 + {y'_1}^2 \right] + m_2 \left[{x'_2}^2 + {y'_2}^2 \right] + m_3 \left[{x'_3}^2 + {y'_3}^2 \right] \\ &= m[a^2 + a^2] + 2m[a^2 + a^2] + m[a^2 + 9a^2] = 16ma^2. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Uočimo da je sustav dvodimenzionalan ($z = 0$) pa vrijedi teorem o okomitim osima $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$. Nedijagonalni elementi tenzora tromosti I_{xz} i I_{yz} propadaju ($z = 0$ za sve tri čestice) pa preostaje samo element I_{xy}

$$I_{xy} = -\sum_n m_n x'_n y'_n = -m[a^2] - 2m[-a^2] - m[-3a^2] = 4ma^2, \tag{2.79}$$

Tenzor tromosti sustava s obzirom na centar mase glasi

$$I = 4ma^2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{2.80}$$

Primjer 2.2

Koristeći Steinerov teorem, izračunajte tenzor tromosti s obzirom na točku O za sustav čestica iz prethodnog zadatka.

Tenzor tromosti sustava s obzirom na centar mase smo izračunali u prethodnom zadatku

$$I = 4ma^2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{2.81}$$

Zadatak rješavamo primjenom Steinerovog teorema

$$I_{ij}^{O} = I_{ij}^{c.m.} + m_{tot}\left[\vec{d}^2\delta_{ij} - d_i d_j\right], \tag{2.82}$$

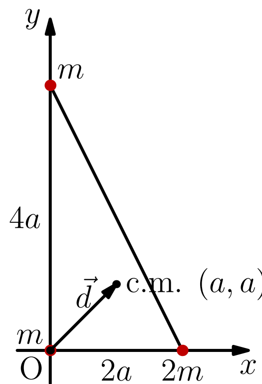
pri čemu $m_{tot} = 4m$ označava ukupnu masu sustava, a $\vec{d}$ vektor s početkom u točki O i krajem u centru mase. Sa sl. 2.3 možemo pročitati komponente vektora $\vec{d}$

$$\vec{d} = a\vec{i} + a\vec{j}. \tag{2.83}$$

Dijagonalni elementi tenzora inercije s obzirom na točku O

- $I_{xx}^{O} = I_{xx}^{c.m.} + m_{tot}\left(d_y^2 + d_z^2\right) = I_{xx}^{c.m.} + 4ma^2 = 16ma^2$
- $I_{yy}^{O} = I_{yy}^{c.m.} + m_{tot}\left(d_x^2 + d_z^2\right) = I_{yy}^{c.m.} + 4ma^2 = 8ma^2$
- $I_{zz}^{O} = I_{zz}^{c.m.} + m_{tot}\left(d_x^2 + d_x^2\right) = I_{xx}^{c.m.} + 8ma^2 = 24ma^2$

Nedijagonalni elementi tenzora inercije



Slika 2.3: Sustav od tri čestice. Vektor $\vec{d}$ ima početak u točki O i kraj u centru mase.

- $I_{xy}^{O} = I_{xy}^{c.m.} - m_{tot} d_x d_y = I_{xy}^{c.m.} - 4ma^2 = 0$
- $I_{xz}^{O} = I_{xz}^{c.m.} - m_{tot} d_x d_z = I_{xz}^{c.m.} - 0 = 0$
- $I_{yz}^{O} = I_{yz}^{c.m.} - m_{tot} d_y d_z = I_{yz}^{c.m.} - 0 = 0$

Tenzor tromosti s obzirom na točku O je dijagonalan u sustavu xyz, pa su osi sustava glavne osi tenzora tromosti. Tenzor tromosti sustava s obzirom na točku O glasi

$$I^{O} = 8ma^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{2.84}$$

Primjer 2.3

Za sustav čestica iz prethodnog zadatka nađite smjerove glavnih osi i momente oko njih s obzirom na centar mase.

U prethodnim zadacima smo izračunali položaj centra mase $(a, a, 0)$, kao i tenzor inercije s obzirom na centar mase

$$I = \begin{pmatrix} 3A & A & 0 \\ A & A & 0 \\ 0 & 0 & 4A \end{pmatrix}. \tag{2.85}$$

Rješavanje ovakvog problema svodi se na rješavanje problema svojstvenih vrijednosti

$$Iv^{(i)} = \lambda_i v^{(i)} \Longrightarrow [I - \lambda_i]\, v^{(i)}. \tag{2.86}$$

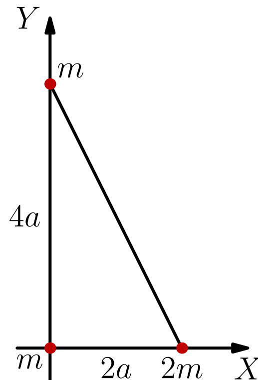
Svojstveni vektori $v^{(i)}$ čine stupce matrice transoformacije a^T iz početnog sustava xyz u sustav $x'y'z'$ u kojem je tenzor tromosti dijagonalan. Osi sustava $x'y'z'$ zovemo glavne osi krutog tijela. Svojstvene vrijednosti λ_i odgovaraju momentima tromosti oko glavnih osi. Jednadžba (2.86) ima netrivijalno rješenje samo ako je determinanta sustava jednaka nuli

$$\det(I - \lambda \mathbb{1}) = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 3A-\lambda & A & 0 \\ A & A-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4A-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2.87}$$

izračunamo determinantu

$$(4A - \lambda)\left[(3A-\lambda)(A-\lambda) - A^2\right] = 0, \tag{2.88}$$

$$(4A - \lambda)\left[\lambda^2 - 4A\lambda + 2A^2\right] = 0. \tag{2.89}$$



Slika 2.4: Sustav od tri čestice.

Svojstvene vrijednosti glase

- $\lambda_1 = (2+\sqrt{2})A = 4(2+\sqrt{2})ma^2$
- $\lambda_2 = (2-\sqrt{2})A = 4(2-\sqrt{2})ma^2$
- $\lambda_3 = 4A = 16ma^2$

Sustav leži u ravnini pa vrijedi teorem o okomitim osima $\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3$. U sljedećem koraku, za svaku svojstvenu vrijednost tražimo odgovarajući svojstveni vektor.
Treća svojstvena vrijednost: $\lambda_3 = 4A$
Uvrštavanje vrijednosti λ_3 u jedn. (2.86) vodi na sustav jednadžbi za komponente svojstvenog vektora $v^{(3)}$

$$\begin{pmatrix} 3A & A & 0 \\ A & A & 0 \\ 0 & 0 & 4A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \end{pmatrix} = 4A \begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{2.90}$$

Dobili smo homogeni sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice

$$\begin{matrix} -Av_1^{(3)} + Av_2^{(3)} = 0 \\ Av_1^{(3)} - 3Av_2^{(3)} = 0 \\ 0 \cdot v_3^{(3)} = 0 \end{matrix} \implies \begin{matrix} v_1^{(3)} = v_2^{(3)} = 0 \\ v_3^{(3)} = 1 \end{matrix} \tag{2.91}$$

Treći stupac matrice transformacije a^T glasi

$$v^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.92}$$

Bitno je uočiti da je matrica transformacije a^T ortogonalna pa svaki njen stupac mora biti normiran, odnosno svaki svojstveni vektor $v^{(i)}$ moramo normirati

$$v_1^{(i)2} + v_2^{(i)2} + v_3^{(i)2} = 1. \tag{2.93}$$

Prva svojstvena vrijednost: $\lambda_1 = (2+\sqrt{2})A$
Jednadžba svojstvenog vektora

$$\begin{pmatrix} 3A & A & 0 \\ A & A & 0 \\ 0 & 0 & 4A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix} = (2+\sqrt{2})A \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix}. \tag{2.94}$$

Dobili smo homogeni sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice

$$\begin{array}{c} (1-\sqrt{2})Av_1^{(1)} + Av_2^{(1)} = 0 \\ Av_1^{(1)} - (1+\sqrt{2})Av_2^{(1)} = 0 \\ (2-\sqrt{2})Av_3^{(1)} = 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} v_1^{(1)} = (1+\sqrt{2})v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} = 0. \end{array} \tag{2.95}$$

Normirani svojstveni vektor, a time ujedno i prvi stupac matrice transformacije a^T

$$v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.96}$$

Druga svojstvena vrijednost: $\lambda_2 = (2-\sqrt{2})A$
Jednadžba svojstvenog vektora

$$\begin{pmatrix} 3A & A & 0 \\ A & A & 0 \\ 0 & 0 & 4A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix} = (2-\sqrt{2})A \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{2.97}$$

Dobili smo homogeni sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice

$$\begin{array}{c} (1-\sqrt{2})Av_1^{(2)} + Av_2^{(2)} = 0 \\ Av_1^{(2)} - (1-\sqrt{2})Av_2^{(2)} = 0 \\ (2-\sqrt{2})Av_3^{(2)} = 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} v_1^{(2)} = (1-\sqrt{2})v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} = 0. \end{array} \tag{2.98}$$

Normirani svojstveni vektor, a time ujedno i prvi stupac matrice transformacije a^T

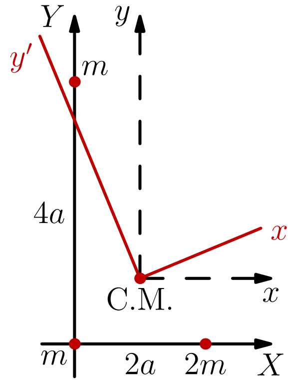
$$v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.99}$$

Matrica transformacije

$$a^T = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & v_1^{(3)} \\ v_2^{(1)} & v_2^{(2)} & v_2^{(3)} \\ v_3^{(1)} & v_3^{(2)} & v_3^{(3)} \end{pmatrix} \Longrightarrow a = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & v_3^{(1)} \\ v_1^{(2)} & v_2^{(2)} & v_3^{(2)} \\ v_1^{(3)} & v_2^{(3)} & v_3^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{2.100}$$

Sada možemo izračunati i kut za koji moramo zakrenuti početni sustav xyz oko osi z da bi dobili sustav glavnih osi. Matrica rotacije oko osi z za kut ϕ glasi

$$a = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \cos\phi = v_1^{(1)}, \quad \sin\phi = v_2^{(1)}. \tag{2.101}$$



Slika 2.5: x', y' i z' su glavne osi sustava.

Uvrštavanje brojeva iz ovog konkretnog zadatka daje $\phi \approx 22.5^0$. Koristeći svojstvene vektore tenzora tromosti možemo izračunati i jedinične vektore sustava glavnih osi

$$\vec{e}_i' = \sum_k a_{ik}\vec{e}_k = \sum_k a^T_{ki}\vec{e}_k = \sum_k v_k^{(i)}\vec{e}_k. \tag{2.102}$$

Uvrstimo svojsvene vektore iz ovog zadatka

$$\vec{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\left((1+\sqrt{2})\vec{i}+\vec{j}\right), \tag{2.103}$$

$$\vec{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\left((1-\sqrt{2})\vec{i}+\vec{j}\right) \tag{2.104}$$

$$\vec{e}_3' = \vec{k}. \tag{2.105}$$

Primjer 2.4

Izračunajte tenzor inercije s obzirom na točku O za homogenu ploču mase m, smještenu kao na slici.

Gustoću tanke ploče smještene u ravnini xy možemo napisati kao produkt δ funkcije i plošne gustoće

$$\rho\left(x,y,z\right)=\sigma\left(x,y\right)\delta(z). \tag{2.106}$$

Ploča je usto homogena pa je plošna gustoća omjer mase i površine ploče

$$\sigma(x,y)=\frac{\text{masa}}{\text{površina}}=\frac{m}{a^2}. \tag{2.107}$$

Dijagonalni elementi tenzora inercije

$$I_{xx}=\sigma\int y^2dxdy \tag{2.108}$$

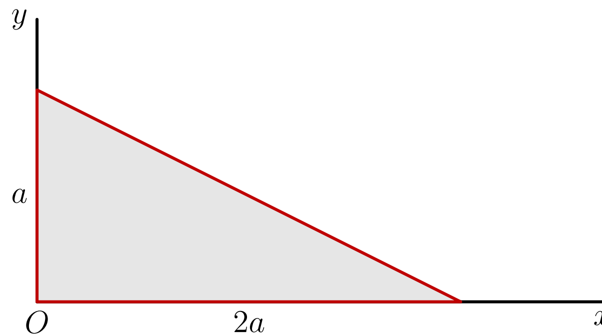
$$I_{yy}=\sigma\int x^2dxdy \tag{2.109}$$

$$I_{zz}=\sigma\int\left(x^2+y^2\right)dxdy. \tag{2.110}$$

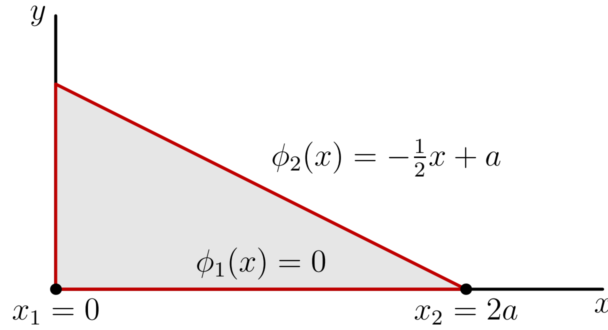
Nedijagonalni elementi I_{xz} i I_{yz} propadaju ($z=0$) pa preostaje

$$I_{xy}=-\sigma\int xydxdy. \tag{2.111}$$

Problem se sveo na računanje tri plošna integrala po zadanom trokutu. Promotrimo detaljnije integral I_{xx}. Odabiremo poredak integracije tako da prvo integri-



Slika 2.6: Ploča u obliku trokuta.



Slika 2.7: Integriramo po površini omeđenoj trokutom.

ramo po y držeći varijablu x fiksnom, a zatim integriramo po x.

$$I_{xx} = \sigma \int y^2 dxdy = \sigma \int_{x_1}^{x_2} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} y^2 dxdy \tag{2.112}$$

Prvo moramo odrediti granice integracije koje nas zadržavaju unutar trokuta. Zadani trokut je omeđen s tri pravca

- donja kateta: $y = 0$
- lijeva kateta: $x = 0$
- hipotenuza: $y = -x/2 + a$

Da bi ostali unutar trokuta varijablu x možemo mijenjati između 0 i $2a$

$$\Longrightarrow x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 = 2a. \tag{2.113}$$

Za prozivoljni x unutar tog intervala varijabla y može poprimiti vrijednosti između 0 i $y = -x/2 + a$

$$\Longrightarrow \phi_1(x) = 0 \quad \text{i} \quad \phi_2(x) = -\frac{1}{2}x + a. \tag{2.114}$$

Dakle, prvo integriramo po varijabli y

$$I_{xx} = \sigma \int_0^{2a} dx \left[\int_0^{-x/2+a} y^2 dy \right] = \sigma \int_0^{2a} dx \left[\frac{y^3}{3} \bigg|_0^{-x/2+a} \right] \tag{2.115}$$

$$= \frac{\sigma}{3} \int_0^{2a} \left(-\frac{x}{2} + a \right)^3 dx = -\frac{\sigma}{24} \int_0^{2a} (x - 2a)^3 \, dx. \tag{2.116}$$

Zatim integriramo po varijabli x

$$I_{xx} = -\frac{\sigma}{24}\int_0^{2a} (x-2a)^3\, d(x-2a) = -\frac{\sigma}{24}\int_{-2a}^{0} u^3 du \tag{2.117}$$

$$= -\frac{\sigma}{24}\,\frac{u^4}{4}\bigg|_{-2a}^{0} = \frac{1}{6}\sigma a^4 = \frac{1}{6}ma^2. \tag{2.118}$$

Jednakim postupkom dolazimo do preostala dva elementa tenzora inercije

$$I_{yy} = \frac{2}{3}ma^2 \quad \text{i} \quad I_{xy} = -\frac{1}{6}ma^2. \tag{2.119}$$

Dijegonalni element tenzora I_{zz} možemo izračunati koristeći teorem o okomitim osima

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) ma^2 = \frac{5}{6}ma^2. \tag{2.120}$$

Ukupni tenzor tromosti s obzirom na točku O

$$I = \frac{1}{6}ma^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \tag{2.121}$$

Primjer 2.5

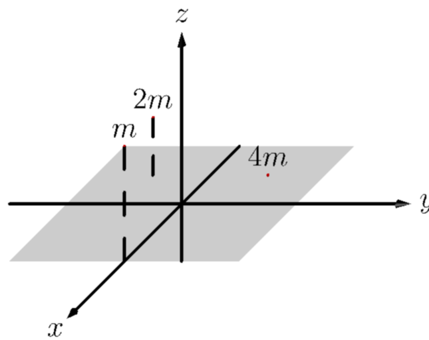
Kruto tijelo se sastoji od masa $2m$, m i $4m$ smještenih u točkama $(-1,-1,1)$, $(2,0,2)$ i $(-1,1,0)$. Nađite glavne osi tenzora inercije i momente oko njih.

Računamo pojedine elemente tenzora inercije

- $I_{xx} = \sum_n m_n({y_n}^2 + {z_n}^2) = 12m$
- $I_{yy} = \sum_n m_n({x_n}^2 + {z_n}^2) = 16m$
- $I_{zz} = \sum_n m_n({x_n}^2 + {y_n}^2) = 16m$
- $I_{xy} = I_{yx} = -\sum_n m_n x_n y_n = 2m$
- $I_{xz} = I_{zx} = -\sum_n m_n x_n z_n = -2m$
- $I_{yz} = I_{zy} = -\sum_n m_n y_n z_n = 2m$

Tenzor inercije glasi

$$I = \begin{pmatrix} 6A & A & -A \\ A & 8A & A \\ -A & A & 8A \end{pmatrix} \quad ; \quad A = 2m. \tag{2.122}$$



Slika 2.8: Tri čestice smještene u točkama $(-1,-1,1)$, $(2,0,2)$ i $(-1,1,0)$.

Tražimo svojstvene vektore tenzora inercije

$$Iv^{(i)} = \lambda_i v^{(i)} \Longrightarrow [I - \lambda_i \mathbb{1}]\, v^{(i)} = 0. \quad (2.123)$$

Da bi sustav imao netrivijalno rješenje, determinanta mu mora iščezavati

$$\begin{vmatrix} 6A-\lambda & A & -A \\ A & 8A-\lambda & A \\ -A & A & 8A-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.124)$$

Računamo determinantu razvojem po prvom retku

$$(6A-\lambda)\begin{vmatrix} 8A-\lambda & A \\ A & 8A-\lambda \end{vmatrix} - A\begin{vmatrix} A & A \\ -A & 8A-\lambda \end{vmatrix} - A\begin{vmatrix} A & 8A-\lambda \\ -A & A \end{vmatrix}. \quad (2.125)$$

Drugi i treći član daju jednaki doprinos

$$\text{det} = (6A-\lambda)\begin{vmatrix} 8A-\lambda & A \\ A & 8A-\lambda \end{vmatrix} - 2A\begin{vmatrix} A & A \\ -A & 8A-\lambda \end{vmatrix}. \quad (2.126)$$

Izračunamo prvi član

$$\text{det}_1 = (6A-\lambda)\begin{vmatrix} 8A-\lambda & A \\ A & 8A-\lambda \end{vmatrix} = (6A-\lambda)\left[(8A-\lambda)^2 - A^2\right] = (6A-\lambda)(7A-\lambda)(9A-\lambda), \quad (2.127)$$

a zatim i drugi

$$\text{det}_2 = -2A\begin{vmatrix} A & A \\ -A & 8A-\lambda \end{vmatrix} = -2A\left[A(8A-\lambda) + A^2\right] = -2A^2(9A-\lambda). \quad (2.128)$$

Zbrojimo ta dva člana i dolazimo do jednadžbe za λ

$$(9A-\lambda)\left[(7A-\lambda)(6A-\lambda) - 2A^2\right] = 0. \quad (2.129)$$

Rješenja jednadžbe su svojstvene vrijednosti tenzora tromosti

- $\lambda_1 = 9A = 18m$
- $\lambda_2 = 8A = 16m$
- $\lambda_3 = 5A = 10m$

Za svaku svojstvenu vrijednost tražimo odgovarajući svojstveni vektor.
Prva svojstvena vrijednost: $\lambda_1 = 9A$
Jednadžba svojstvenog vektora

$$\begin{pmatrix} 6A & A & -A \\ A & 8A & A \\ -A & A & 8A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix} = 9A\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (2.130)$$

Homogeni sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice

$$\begin{array}{c} -3Av_1^{(1)} + Av_2^{(1)} - Av_3^{(1)} = 0 \\ Av_1^{(1)} - Av_2^{(1)} + Av_3^{(1)} = 0 \\ -Av_1^{(1)} + Av_2^{(1)} - Av_3^{(1)} = 0 \end{array} \implies \begin{array}{c} v_1^{(1)} = 0 \\ v_3^{(1)} = v_2^{(1)}. \end{array} \tag{2.131}$$

Normirani svojstveni vektor, odnosno prvi stupac matrice transformacije a^T

$$v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.132}$$

Druga svojstvena vrijednost: $\lambda_2 = 8A$ Jednadžba svojstvenog vektora

$$\begin{pmatrix} 6A & A & -A \\ A & 8A & A \\ -A & A & 8A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix} = 8A \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{2.133}$$

Homogeni sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice

$$\begin{array}{c} -2Av_1^{(2)} + Av_2^{(2)} - Av_3^{(2)} = 0 \\ Av_1^{(2)} + Av_3^{(2)} = 0 \\ -Av_1^{(2)} + Av_2^{(2)} = 0 \end{array} \implies \begin{array}{c} v_2^{(2)} = v_1^{(2)} \\ v_3^{(2)} = -v_1^{(2)}. \end{array} \tag{2.134}$$

Normirani svojstveni vektor, odnosno drugi stupac matrice transformacije a^T

$$v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.135}$$

Treća svojstvena vrijednost: $\lambda_3 = 5A$
Jednadžba svojstvenog vektora

$$\begin{pmatrix} 6A & A & -A \\ A & 8A & A \\ -A & A & 8A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \end{pmatrix} = 5A \begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{2.136}$$

Homogeni sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice

$$\begin{array}{c} Av_1^{(3)} + Av_2^{(3)} - Av_3^{(3)} = 0 \\ Av_1^{(3)} + 3Av_2^{(3)} + Av_3^{(3)} = 0 \\ -Av_1^{(3)} + Av_2^{(3)} + 3Av_3^{(3)} = 0 \end{array} \implies \begin{array}{c} v_2^{(3)} = -v_3^{(3)} \\ v_1^{(3)} = 2v_3^{(3)}. \end{array} \tag{2.137}$$

Normirani svojstveni vektor, odnosno treći stupac matrice transformacije a^T

$$v^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.138}$$

Jedinični vektori sustava u kojem je tenzor dijagonalan

$$\vec{e}_i' = \sum_k a_{ik} \vec{e}_k. \tag{2.139}$$

$$\vec{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{j} + \vec{k} \right), \tag{2.140}$$

$$\vec{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \right), \tag{2.141}$$

$$\vec{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \right). \tag{2.142}$$

Provjerimo da li jedinični vektori $\vec{e}_i'$ čine desni sustav

$$\vec{e}_1' \times \vec{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\vec{j} + \vec{k} \right) \times \left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\vec{k} - \vec{i} + \vec{j} - \vec{i} \right) = \vec{e}_3'. \tag{2.143}$$

2.5 Momenti inercije geometrijskih tijela

U sljedećim primjera izračunat ćemo momente inercije uobičajenih geometrijskih tijela: tanki štap, kugla, valjak, kvadar i stožac. Za sva tijela pretpostavljamo da su homogena.

2.5.1 Tanki štap

Tražimo momente inercije oko glavnih osi kroz centar mase tankog homogenog štapa mase m i duljine l. Prvo uočimo da su x, y i z osi simetrije štapa, a time i njegove glavne osi. Štap je tanak pa je njegova gustoća ograničena na $x = y = 0$

$$\rho(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\lambda(z). \tag{2.144}$$

Pritom funkcija $\lambda(z)$ odgovara linijskoj gustoći štapa. U slučaju homogenog štapa, gustoća je jednolika, odnosno linijska gustoća je jednostavno masa po jedinici duljine $\lambda = m/l$. Štap je beskonačno tanak pa rotacija oko osi z gubi smisao. Odgovarajući moment inercije I_z jednak je nuli. Ovakvo tijelo nema šest, nego pet stupnjeva slobode. Računamo moment inercije oko osi x

$$I_x = \int_{-l/2}^{l/2} \left(y^2 + z^2\right) \lambda dz = \lambda \int_{-l/2}^{l/2} z^2 dz = \frac{1}{12}\lambda l^3 = \frac{1}{12} m l^2. \tag{2.145}$$

Zbog simetrije problema, moment inercije oko osi y I_y jednak je momentu inercije oko osi x

$$I_y = I_x = \frac{1}{12} m l^2. \tag{2.146}$$

2.5.2 Kugla

Tražimo momente inercije oko glavnih osi kroz centar mase homogene kugle mase m i radijusa R. x, y i z su osi simetrije kugle, a time i njezine glavne osi. Traženi momenti inercije odgovaraju sljedećim volumnim integralima

$$I_x = \int \left(y^2 + z^2\right) \rho dV, \tag{2.147}$$

$$I_y = \int \left(x^2 + z^2\right) \rho dV, \tag{2.148}$$

$$I_z = \int \left(x^2 + y^2\right) \rho dV. \tag{2.149}$$

Iz simetrije problema slijedi da su sva tri momenta inercije jednaka. Umjesto da računamo svaki moment inercije posebno, jednostavnije je izračunati

$$I_x + I_y + I_z \equiv 3I = 2\int \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \rho dV = 2\rho \int r^2 dV. \tag{2.150}$$

U zadnjem koraku smo iskoristili homogenost kugle ($\rho = m/V$). Integral rješavamo u sfernom koordinatnom sustavu

$$I = \frac{2}{3}\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^4 dr \sin\theta d\theta d\phi = \frac{2}{3}\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{R} r^4 dr. \tag{2.151}$$

Preostali integrali su potpuno elementarni

$$I = \frac{2}{5} m R^2. \tag{2.152}$$

2.5.3 Valjak

Nađite momente inercije oko glavnih osi kroz centar mase homogenog valjka mase m i radijusa R. x, y i z su osi simetrije valjka, a time i njezine glavne osi. Traženi momenti inercije odgovaraju sljedećim volumnim integralima

$$I_x = \int \left(y^2 + z^2\right) \rho dV, \tag{2.153}$$

$$I_y = \int \left(x^2 + z^2\right) \rho dV, \tag{2.154}$$

$$I_z = \int \left(x^2 + y^2\right) \rho dV. \tag{2.155}$$

Iz simetrije problema slijedi da su momenti inercije I_x i I_y jednaki. Umjesto da računamo svaki moment inercije posebno, jednostavnije je izračunati

$$I_x + I_y \equiv 2I = \int \left(x^2 + y^2 + 2z^2\right) \rho dV = \rho \int \left(r_\perp^2 + 2z^2\right) dV. \tag{2.156}$$

U zadnjem koraku smo iskoristili homogenost valjka ($\rho = m/V$). Integral rješavamo u cilindričnom sustavu

$$I = \frac{1}{2}\rho \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{R} \left(r_\perp^2 + 2z^2\right) r_\perp dr_\perp dz d\phi. \tag{2.157}$$

Rastavimo integral na dva dijela. Prvi dio integrala sadrži $r_\perp$

$$I_1 = \frac{1}{2}\rho \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{R} r_\perp^3 dr_\perp dz d\phi = \frac{1}{4}\rho\pi R^4 h = \frac{1}{4} m R^2, \tag{2.158}$$

dok drugi dio sadrži z

$$I_2 = \frac{1}{2}\rho \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^R r_\perp z^2 dr_\perp dz d\phi = \frac{1}{12}\rho R^2 \pi h^3 = \frac{1}{12} m h^2. \tag{2.159}$$

Dakle, momenti inercije oko osi x i y glase

$$I_x = I_y = I_1 + I_2 = \frac{1}{12} m \left(3R^2 + h^2\right). \tag{2.160}$$

Preostalo nam je još izračunati moment inercije oko osi z

$$I_z = \rho \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^r r_\perp^3 dr_\perp dz d\phi = \frac{1}{2} m R^2. \tag{2.161}$$

2.5.4 Kvadar

Tražimo momente inercije oko glavnih osi kroz centar mase homogenog kvadra mase m i stranica a, b i c. x, y i z su osi simetrije kvadra, a time ujedno i njegove glavne osi. Momenti inercije odgovaraju volumnim integralima

$$I_x = \int \left(y^2 + z^2\right) \rho dV, \tag{2.162}$$

$$I_y = \int \left(x^2 + z^2\right) \rho dV, \tag{2.163}$$

$$I_z = \int \left(x^2 + y^2\right) \rho dV. \tag{2.164}$$

Kvadar je homogen, što znači da mu je gustoća konstantna $\rho = m/V$. Izračunajmo prvo moment inercije oko osi x

$$I_x = \rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(y^2 + z^2\right) dx dy dz \tag{2.165}$$

$$I_x = \rho \left(ab \int_{-c/2}^{c/2} z^2 dz + ac \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \right) \tag{2.166}$$

$$I_x = \rho \left(ab \frac{c^3}{12} + ac \frac{b^3}{12} \right) \tag{2.167}$$

$$I_x = \rho \frac{abc}{12} \left(b^2 + c^2\right) \tag{2.168}$$

$$I_x = \frac{m}{12} \left(b^2 + c^2\right). \tag{2.169}$$

Jednakim postpukom došli bi do preostala dva momenta inercije

$$I_x = \frac{m}{12}\left(b^2 + c^2\right), \tag{2.170}$$

$$I_y = \frac{m}{12}\left(a^2 + c^2\right), \tag{2.171}$$

$$I_z = \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right). \tag{2.172}$$

2.5.5 Stožac

Tražimo momente inercije s obzirom na centar mase oko glavnih osi homogenog stošca mase m, radijusa R i visine h. x, y i z su osi simetrije stošca, a time ujedno i njegove glavne osi. Traženi momenti inercije odgovaraju volumnim integralima

$$I_x = \int \left(y^2 + z^2\right) \rho dV, \tag{2.173}$$

$$I_y = \int \left(x^2 + z^2\right) \rho dV, \tag{2.174}$$

$$I_z = \int \left(x^2 + y^2\right) \rho dV. \tag{2.175}$$

Momente inercije računamo s obzirom na točku O, smještenu u vrhu stošca. Koristeći Steinerov teorem uvijek naknadno možemo prijeći u sustav s ishodištem u centru mase. Iskoristimo činjenicu da je stožac homogen, odnosno da mu je gustoća konstanta $\rho = m/V$. Integrale rješavamo u cilindričnom koordinatnom sustavu. Prvo računamo moment inercije oko osi z

$$I_z = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{z \tan\alpha} r_\perp^3 dr_\perp dz d\phi. \tag{2.176}$$

Integral po varijabli ϕ je trivijalan

$$I_z = 2\pi\rho \int_0^h \int_0^{z \tan\alpha} r_\perp^3 dr_\perp dz. \tag{2.177}$$

Nakon toga možemo integrirati po varijabli $r_\perp$, pritom pazeći da gornja granica integracije ovisi o varijabli z

$$I_z = 2\pi\rho \int_0^h \left.\frac{r_\perp^4}{4}\right|_0^{z\tan\alpha} dz = \frac{1}{2}\pi\rho\tan^4\alpha \int_0^h z^4 dz = \frac{3}{10}\frac{1}{3}R^2\pi h\rho R^2. \tag{2.178}$$

Konačno, moment inercije oko osi z

$$I_z = \frac{3}{10} m R^2. \tag{2.179}$$

Moment inercije oko osi z ne ovisi o h jer visina stošca nema nikakvog utjecaja na vrtnju oko osi z. Iz simetrije problema slijedi da su momenti inercije I_x i I_y jednaki. Umjesto da računamo svaki moment posebno, jednostavnije je izračunati njihovu sumu

$$2I = I_x + I_y = \int \left(x^2 + y^2 + 2z^2\right) \rho dV. \tag{2.180}$$

Ponovno integriramo u cilindričnom sustavu

$$I = \frac{1}{2}\rho \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{z\tan\alpha} \left(r_\perp^2 + 2z^2\right) r_\perp dr_\perp dz d\phi. \tag{2.181}$$

Integral je sličan prethodnom

$$I_x = I_y = \frac{3}{20} m \left(R^2 + 4h^2\right). \tag{2.182}$$

Da bi primijenili Steinerov teorem, trebamo položaj centra mase stošca. Zbog osne simetrije, isti se nalazi na osi z.

$$z_{cm} = \frac{1}{m}\int z\rho dV = \frac{\rho}{m}\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{z\tan\alpha} r_\perp dr_\perp z dz d\phi = \frac{3}{4}h. \tag{2.183}$$

Primjenimo Steinerov teorem

$$I_{ij}^O = I_{ij}^{cm} + m\left(\vec{a}^2\delta_{ij} - a_i a_j\right), \tag{2.184}$$

na ovaj slučaj. Komponente vektora $\vec{a}$ s početkom u točki O i krajem u centru mase glase $a_x = 0$, $a_y = 0$ i $a_z = \frac{3}{4}h$

$$I_x^{cm} = I_{xx}^{cm} = I_{xx}^O - m\vec{a}^2 = \frac{3}{20}m\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right), \tag{2.185}$$

$$I_y^{cm} = I_{yy}^{cm} = I_{yy}^O - m\vec{a}^2 = \frac{3}{20}m\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right), \tag{2.186}$$

$$I_z^{cm} = I_{zz}^{cm} = I_{zz}^O = \frac{3}{10}mR^2. \tag{2.187}$$

Svi nedijagonalni elementi tenzora iščezavaju.

Primjer 2.6

Nađite smjerove glavnih osi i momente oko njih s obzirom na točku O za valjak radijusa d, visine $d\sqrt{3}$ i mase m. Pokažite da jedna glavna os prolazi kroz centar mase.

Iskoristimo li formule (2.160) i (2.161) možemo napisati tenzor tromosti s obzirom na centar mase

$$I^{c.m.} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}md^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}md^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}md^2 \end{pmatrix}. \tag{2.188}$$

Tenzor s obzirom na točku O možemo naći koristeći Steinerov teorem

$$I^O_{ij} = I^{cm}_{ij} + m\left(\vec{a}^2\delta_{ij} - a_i a_j\right). \tag{2.189}$$

Vektor s početkom u točki O i krajem u centru mase ima sljedeće komponente $a_x = 0$, $a_y = d$ i $a_z = d\frac{\sqrt{3}}{2}$

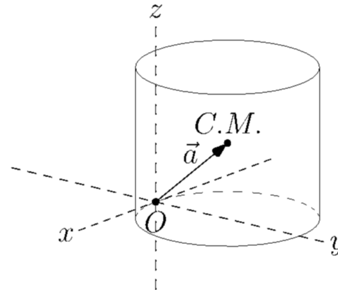
$$\vec{a} = \left(0, d, d\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{2.190}$$

Dijagonalni elementi tenzora tromosti s obzirom na točku O

$$I_{xx} = I'_{xx} + m\left(\vec{a}^2 - a_x^2\right) = \frac{9}{4}md^2, \tag{2.191}$$

$$I_{yy} = I'_{yy} + m\left(\vec{a}^2 - a_y^2\right) = \frac{5}{4}md^2, \tag{2.192}$$

$$I_{zz} = I'_{zz} + m\left(\vec{a}^2 - a_z^2\right) = \frac{3}{2}md^2. \tag{2.193}$$



Slika 2.9: Tražimo tenzor tromosti s obzirom na točku O.

Nedijagonalni elementi tenzora tromosti s obzirom na točku O

$$I_{xy} = I'_{xy} - m a_x a_y = 0, \tag{2.194}$$

$$I_{xz} = I'_{xz} - m a_x a_z = 0, \tag{2.195}$$

$$I_{yz} = I'_{yz} - m a_y a_z = -\frac{\sqrt{3}}{2} m d^2. \tag{2.196}$$

Tenzor tromosti s obzirom na točku O

$$I^{O'} = \begin{pmatrix} 9A & 0 & 0 \\ 0 & 5A & -2\sqrt{3}A \\ 0 & -2\sqrt{3}A & 6A \end{pmatrix}, \tag{2.197}$$

pri čemu je $A = md^2/4$. Tražimo svojstvene vrijednosti matrice I^O

$$\begin{vmatrix} 9A-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5A-\lambda & -2\sqrt{3}A \\ 0 & -2\sqrt{3}A & 6A-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2.198}$$

izračunamo determinantu

$$(9A-\lambda)\left[(5A-\lambda)(6A-\lambda) - 12A^2\right] = 0. \tag{2.199}$$

Slijede svojstvene vrijednosti matrice $I^{O'}$

$$\lambda_1 = 2A\ , \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 9A, \tag{2.200}$$

kao i momenti inercije oko glavnih osi

$$I_1 = \frac{1}{2} m d^2\ , \quad I_2 = I_3 = \frac{9}{4} m d^2. \tag{2.201}$$

Za svaku svojstvenu vrijednost tražimo odgovarajući svojstveni vektor.

Prva svojstvena vrijednost

Jednadžba svojstvenog vektora glasi

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2\sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix}. \tag{2.202}$$

Homogeni sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice glasi Trebamo riješiti homogeni sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice

$$7v_1^{(1)} = 0, \tag{2.203}$$

$$3v_2^{(1)} - 2\sqrt{3}v_3^{(1)} = 0, \tag{2.204}$$

$$-2\sqrt{3}v_2^{(1)} + 4v_3^{(1)} = 0. \tag{2.205}$$

Rješenje sustava glasi

$$v_1^{(1)} = 0 \quad \text{i} \quad v_3^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}v_2^{(1)}. \tag{2.206}$$

Vektor $v^{(1)}$ odgovara prvom stupcu matrice ortogonalne transformacije a^T pa ga trebamo normirati

$$v^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.207}$$

Odgovarajući jedinični vektor možemo dobiti transformacijom

$$\vec{e}_1' = \sum_k a_{1k}\vec{e}_k = \sum_k a_{k1}^T \vec{e}_k = \sum_k v_k^{(1)}\vec{e}_k, \tag{2.208}$$

a isti očito prolazi kroz centar mase valjka

$$\vec{i}' = \frac{2}{\sqrt{7}}\left(\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}\right). \tag{2.209}$$

Druga i treća svojstvena vrijednost

Preostale dvije svojstvene vrijednosti su degenerirane pa su jednadžbe svojstvenih vektora zajedničke

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2\sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(2,3)} \\ v_2^{(2,3)} \\ v_3^{(2,3)} \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} v_1^{(2,3)} \\ v_2^{(2,3)} \\ v_3^{(2,3)} \end{pmatrix}. \tag{2.210}$$

Komponenta $v_1^{(2,3)}$ je neodređena, dok su komponente $v_2^{(2,3)}$ $v_3^{(2,3)}$ vezane relacijom

$$-2\sqrt{3}v_2^{(2,3)} + 6v_3^{(2,3)} = 9v_3^{(2,3)} \Longrightarrow v_3^{(2,3)} = -\frac{2}{\sqrt{3}}v_2^{(2,3)}. \tag{2.211}$$

Drugi svojstveni vektor možemo izabrati kao

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.212}$$

dok treći mora biti ortogonalan na njega

$$v^{(3)} = \sqrt{\frac{3}{7}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \tag{2.213}$$

Odgovarajući jedinični vektori

$$\vec{i}' = \frac{2}{\sqrt{7}} \left(-\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k} \right), \quad \vec{j}' = \vec{i}, \quad \vec{k}' = \sqrt{\frac{3}{7}} \left(-\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{3}} \vec{k} \right), \tag{2.214}$$

čine desni ortonormirani sustav.

Primjer 2.7

Homogeni štap mase M i duljine $2a$ kreće se bez trenja u sfernom udubljenju polumjera R tako da stalno ostaje u okomitoj ravnini koja prolazi kroz centar sfere. Nađite kinetičku energiju štapa.

Štap rotira kutnom brzinom $\dot{\phi}$ oko osi koja je za b udaljena od centra mase štapa i okomita je na ravninu u kojoj se štap giba. Kinetička energija štapa glasi

$$T = \frac{1}{2} I^O_{\text{štap}} \dot{\phi}^2. \tag{2.215}$$

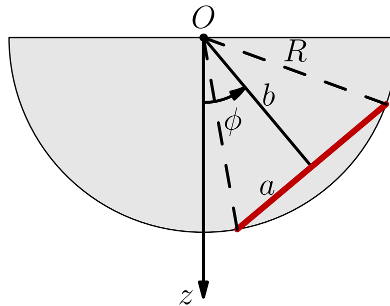
Moment inercije s obzirom na točku O možemo izračunati pomoću Steinerovog teorema

$$I^O_{\text{štap}} = I^{c.m.}_{\text{štap}} + Mb^2, \tag{2.216}$$

$$I^O_{\text{štap}} = \frac{1}{12} M(2a)^2 + M(R^2 - a^2) = M\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right). \tag{2.217}$$

Konačno, kinetička energija štapa

$$T = \frac{M}{2}\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right)\dot{\phi}^2. \tag{2.218}$$



Slika 2.10: Štap dužine $2a$ klizi po sfernom udubljenju radijusa R.

Primjer 2.8

Ploča u obliku jednakostraničnog trokuta stranice a i mase M obješena je o tanki štap duljine l i mase m tako da se može njihati u vertikalnoj ravnini. Nađite kinetičku energiju sustava.

Ukupna kinetička energija je suma kinetičke energije štapa i trokuta.

Kinetička energija trokuta

Visina jednakostraničnog trokuta iznosi $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, a centar mase trokuta nalazi se u težištu trokuta $t = \frac{2}{3}h = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Koristimo li sustav vezan uz ploču s ishodištem u centru mase ploče, kinetiča energija odgovara zbroju kinetičke energije translacije centra mase i kinetičke energije rotacije oko centra mase

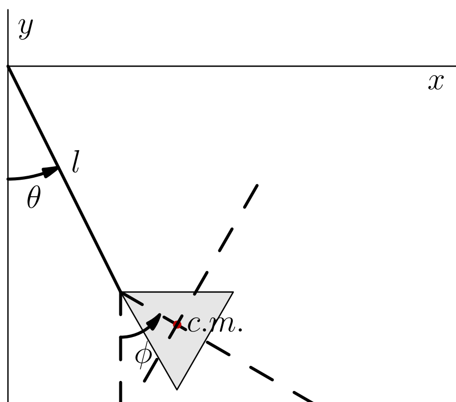
$$T_{trokut} = T^{tr}_{trokut} + T^{rot}_{trokut}. \tag{2.219}$$

Kutna brzina rotacije krutog tijela ne ovisi o izboru ishodišta sustava vezanog uz tijelo

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi}\vec{k}. \tag{2.220}$$

Kinetičkoj energiji rotacije oko centra mase doprinosi samo član $i = j = z$

$$T^{rot}_{trokut} = \frac{1}{2}\sum_{ij} I_{ij}\Omega_i\Omega_j = \frac{1}{2}I^{c.m.}_{trokut}\Omega_z^2 = \frac{1}{2}I^{c.m.}_{trokut}\dot{\phi}^2. \tag{2.221}$$



Slika 2.11: Trokut stranice a pričvršćen je za strop štapom duljine l

Rješavanjem plošnog integrala, uz korištenje Steinerovog teorema, pokazali bi da je moment tromosti jednakostraničnog trokuta s obzirom na centar mase

$$I_{trokut}^{c.m.} = \frac{1}{12} M a^2. \tag{2.222}$$

Slijedi kinetička energija rotacije oko centra mase trokuta

$$T_{trokut}^{rot} = \frac{1}{24} M a^2 \dot{\phi}^2. \tag{2.223}$$

Da bi izračunali kinetičku energiju translacije centra mase trokuta

$$T_{trokut}^{tr} = \frac{M}{2} \left(\dot{x}_{c.m.}^2 + \dot{y}_{c.m.}^2 \right), \tag{2.224}$$

trebamo komponente brzine centra mase trokuta. Položaj centra mase trokuta u fiksnom sustavu

$$x_{c.m.} = l \sin\theta + \frac{a}{\sqrt{3}} \sin\phi \quad \text{i} \quad y_{c.m.} = -l\cos\theta - \frac{a}{\sqrt{3}} \cos\phi. \tag{2.225}$$

Deriviranjem po vremenu dolazimo do komponenti brzine centra mase trokuta u fiksnom sustavu

$$\dot{x}_{c.m.} = l \cos\theta\dot{\theta} + \frac{a}{\sqrt{3}} \cos\phi\dot{\phi}, \tag{2.226}$$

$$\dot{y}_{c.m.} = l \sin\theta\dot{\theta} + \frac{a}{\sqrt{3}} \sin\phi\dot{\phi}. \tag{2.227}$$

Kvadriramo li komponente brzine centra mase i potom ih zbrojimo, dobit ćemo kinetičku energiju translacije centra mase trokuta

$$T_{trokut}^{tr} = \frac{M}{2} \left[l^2\dot{\theta}^2 + \frac{a^2}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} la\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) \right]. \tag{2.228}$$

Ukupna kinetička energija trokuta

$$T_{trokut} = T_{trokut}^{tr} + T_{trokut}^{rot} = \frac{M}{2} \left[l^2\dot{\theta}^2 + \frac{5a^2}{12}\dot{\phi}^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} la\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) \right]. \tag{2.229}$$

Kinetička energija štapa

Štap rotira oko jednog svog kraja pa je njegova kinetička energija

$$T_{\text{štap}} = \frac{1}{2} I_{\text{štap}} \dot{\theta}^2. \tag{2.230}$$

Moment tromosti tankog štapa s obzirom na kraj štapa izračunamo pomoću Steinerovog teorema

$$I_{\text{štap}} = I_{\text{štap}}^{c.m.} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2. \tag{2.231}$$

Slijedi kinetička energija štapa

$$T_{\text{štap}} = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2. \tag{2.232}$$

Primjer 2.9

Dva homogena štapa duljine a i b spojena su pod pravim kutem u točki O na osovinu koja rotira konstantnom kutnom brzinom ω. Nađite kinetičku energiju sustava.

Kinetička energija sustava je zbroj kinetičkih energija pojedinih štapova. Promotrimo prvo štap duljine b. Koordinatni sustav vezan uz štap postavimo u smjeru njegovih glavnih osi. Projiciramo li kutne brzine štapa na glavne osi štapa, dobit ćemo sljedeće komponente

$$\Omega_x = \omega \cos\phi, \quad \Omega_y = \omega \sin\phi, \quad \Omega_z = \dot{\phi}. \tag{2.233}$$

Štap rotira oko fiksirane točke pa njegova kinetička energija odgovara energiji rotacije

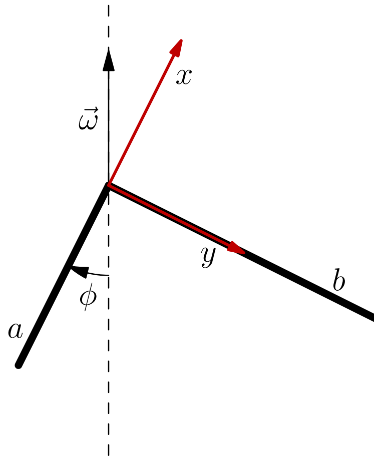
$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \Omega_i \Omega_j. \tag{2.234}$$

Tenzor tromosti beskonačno tankog štapa ima samo dvije komponente različite od nule

$$I_{xx} = I_{zz} = \frac{1}{3} m_b b^2 = \frac{1}{3} \lambda b^3, \tag{2.235}$$

pri čemu je $\lambda = m/b$ linijska gustoća štapa. Kinetička energija štapa b

$$T_b = \frac{1}{2}\left(I_{xx}\Omega_x^2 + I_{zz}\Omega_z^2\right) = \frac{1}{6}\lambda b^3 \left(\omega^2 \cos^2\phi + \dot{\phi}^2\right). \tag{2.236}$$



Slika 2.12: Štapovi spojeni pod pravim kutem rotiraju konstatnom kutnom brzinom $\vec{\omega}$ oko vertikalne osi. Kutna brzina koja odgovara promjeni kuta ϕ okomita je na ravninu u kojoj leže štapovi. Sustav vezan uz svaki pojedini štap postavimo u smjeru njegovih glavnih osi.

Analognim postupkom možemo izračunati kinetičku energiju štapa a

$$T_a = \frac{1}{6}\lambda a^3 \left(\omega^2 \sin^2\phi + \dot{\phi}^2\right). \tag{2.237}$$

Ukupna kinetička energija sustava je zbroj doprinosa pojedinih štapova

$$T = T_a + T_b = \frac{1}{6}\lambda\omega^2 \left(b^3 \cos^2\phi + a^3 \sin^2\phi\right) + \frac{1}{6}\lambda\dot{\phi}^2 \left(b^3 + a^3\right). \tag{2.238}$$

Primjer 2.10

Kraj štapa AB mase m i duljine $2a$ može kliziti bez trenja duž vertikalne žice Oz. Kraj B učvršćen je za točku O napetom žicom OB duljine $l = 2a$. Vertikalna ravnina OBA rotira oko osi z kutnom brzinom $\dot{\phi}$. Nađite kinetičku energiju štapa.

Problem je najjednostavnije riješiti direktnom integracijom. Štap prvo podijelimo na infinitezimalne dijelove, izračunamo kinetičku energiju svakog infinitezimalnog dijela, a zatim zbrojimo sve doprinose. Budući da je štap kontinuirano tijelo, suma će prijeći u integral. Polazimo od koordinata infinitezimalnog dijela štapa

$$x(q) = q\sin\theta\cos\phi, \quad y(q) = q\sin\theta\sin\phi, \quad z(q) = 2a\cos\theta + (2a-q)\cos\theta. \tag{2.239}$$

Deriviranjem po vremenu dolazimo do komponenata brzine infinitezimalnog dijela štapa

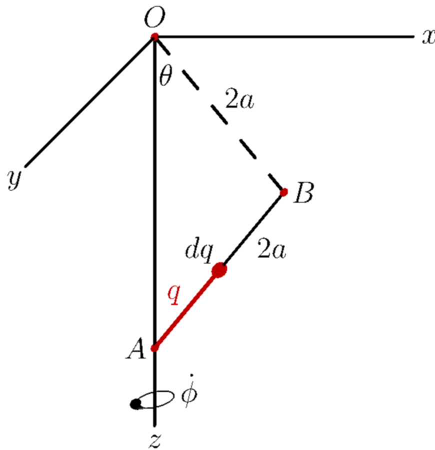
$$\dot{x}(q) = q\cos\theta\cos\phi\dot{\theta} - q\sin\theta\sin\phi\dot{\phi}, \tag{2.240}$$

$$\dot{y}(q) = q\cos\theta\cos\phi\dot{\theta} + q\sin\theta\cos\phi\dot{\phi}, \tag{2.241}$$

$$\dot{z}(q) = -(4a-q)\sin\theta\dot{\theta}. \tag{2.242}$$

Članovi koji bi sadržavali $\dot{q}$ iščezavaju jer je štap kruto tijelo. Zbrojimo kvadrate komponenti brzine infinitezimalnog dijela štapa

$$v^2(q) = \dot{x}(q)^2 + \dot{y}(q)^2 + \dot{z}(q)^2 = (16a^2 - 8aq)\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + q^2\dot{\theta}^2 + q^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2. \tag{2.243}$$



Slika 2.13: Štap AB pričvršćen je napetom žicom za točku O. Ravnina OAB rotira oko osi z.

Da bi izračunali kinetičku energiju štapa sumiramo po svim infinitezimalnim elementima, a kako je tijelo kontinuirano suma prelazi u integral

$$T = \int \frac{dm}{2} v^2. \tag{2.244}$$

Štap je po pretpostavci tanak pa uvodimo linijsku gustoću

$$\lambda = \frac{m}{2a} \Longrightarrow dm = \lambda dq. \tag{2.245}$$

U kinetičku energiju uvrstimo brzinu infinitezimalnog dijela štapa

$$T = \frac{m}{4a} \left[\sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \int_0^{2a} \left(16a^2 - 8aq\right) dq + \dot{\theta}^2 \int_0^{2a} q^2 dq + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \int_0^{2a} q^2 dq \right]. \tag{2.246}$$

Integriranjem dolazimo do kinetičke energije

$$T = \frac{2ma^2}{3} \left[(1 + 6\sin^2 \theta)\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right]. \tag{2.247}$$

3 Euler-Lagrangeove jednadžbe

3.1 Izvod jednadžbi gibanja

Ukupni Lagrangian krutog tijela je razlika kinetičke energije krutog tijela i njegove potencijalne energije

$$L = \frac{1}{2}\mu\vec{V}^2 + \mu\vec{V}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{a}\right) + \frac{1}{2}\sum_{ij} I'_{ij}\Omega_i\Omega_j - U, \tag{3.1}$$

pri čemu je vanjski potencijal je suma doprinosa svih čestica u krutom tijelu

$$U(\vec{r}'_1,\ldots,\vec{r}'_N) = \sum_n U(\vec{r}'_n). \tag{3.2}$$

Lagrangian ovisi o položaju krutog tijela (određenom vektorom $\vec{R}$), kao i o njegovoj orijentaciji (određena vektorom $\vec{\phi}$). Da bi izveli jednadžbe gibanja, moramo varirati Lagrangian po ta dva vektora i pripadnim generaliziranim brzinama $\vec{V}$ i $\vec{\Omega}$. Iako se smjer vektora $\vec{a}$ također mijenja u vremenu, ne radi se o generaliziranoj koordinati.

3.1.1 Varijacija po $\vec{R}$ i $\vec{V}$

Prvo variramo Lagrangian po i-toj komponenti generalizirane brzine $\vec{V}$

$$\frac{\partial L}{\partial V_i} = \mu V_i + \mu\left(\vec{\Omega}\times\vec{a}\right)_i, \tag{3.3}$$

a zatim dobijeni izraz deriviramo po vremenu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial V_i} = \mu\dot{V}_i + \mu\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\times\vec{a}\right)_i. \tag{3.4}$$

Za prvi set Lagrangeovih jednadžbi, preostalo nam je varirati Lagrangian po i-toj komponenti generalizirane koordinate $\vec{R}$

$$\frac{\partial L}{\partial R_i} = -\frac{\partial}{\partial R_i}\sum_n U(\vec{r}'_n) = -\sum_n \lim_{dR_i\to 0}\frac{U(\vec{r}'_n + dR_i) - U(\vec{r}'_n)}{dR_i}. \tag{3.5}$$

Prepoznajemo derivaciju potencijala po i-toj komponenti vektora $\vec{r}'_n$, odnosno i-tu komponentu vanjske sile

$$\frac{\partial L}{\partial R_i} = -\sum_n \frac{\partial U(\vec{r}'_n)}{\partial r'_{n,i}} = \sum_n f_{n,i}. \tag{3.6}$$

Uvedemo li oznaku $\vec{F}$ za ukupnu silu na kruto tijelo i $\vec{P}$ za ukupnu količinu gibanja krutog tijela

$$\vec{F} = \sum_n \vec{f}_n, \quad \vec{P} = \mu \vec{V}, \tag{3.7}$$

jednadžba gibanja glasi

$$\dot{\vec{P}} + \mu \frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega} \times \vec{a}\right) = \vec{F}. \tag{3.8}$$

3.1.2 Varijacija po $\vec{\phi}$ i $\vec{\Omega}$

Variramo Lagrangian po i-toj komponenti kutne brzine Ω_k. Prvo preuredimo mješoviti produkt

$$\vec{V} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{a}\right) = -\vec{V} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{\Omega}\right) = -\left(\vec{V} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{\Omega} = \left(\vec{a} \times \vec{V}\right) \cdot \vec{\Omega}, \tag{3.9}$$

a zatim izračunamo derivaciju

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_k} = \frac{1}{2} \sum_j \left(I'_{jk} + I'_{kj}\right) \Omega_j + \mu \left(\vec{a} \times \vec{V}\right)_k. \tag{3.10}$$

Iskoristimo simetričnost elemenata tenzora inercije

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_k} = \sum_j I'_{kj} \Omega_j + \mu \left(\vec{a} \times \vec{V}\right)_k, \tag{3.11}$$

i konačno dobiveni izraz deriviramo po vremenu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \Omega_k} = \sum_j I'_{kj} \dot{\Omega}_j + \mu \frac{d}{dt} \left(\vec{a} \times \vec{V}\right)_k. \tag{3.12}$$

Varijacija po zakretu ϕ_i je nešto složenija

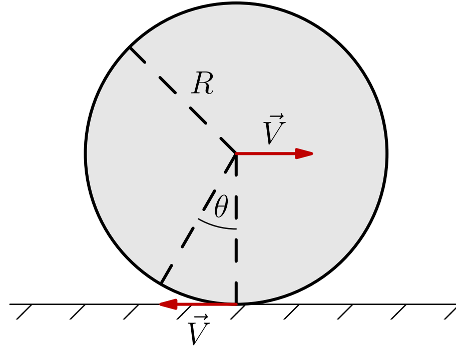
$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\phi}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{\phi}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial \phi_x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial \phi_y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial \phi_z}\vec{k}\right). \tag{3.13}$$

Deriviramo vanjski potencijal po komponenti kuta ϕ_i koristeći pravilo lančanog deriviranja

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_i} = \sum_{n,k} \frac{\partial U}{\partial r'_{n,k}} \frac{\partial r'_{n,k}}{\partial \phi_i}. \tag{3.14}$$

Indeks n označava sumaciju po česticama, dok indeks k označava sumaciju po komponentama. Promjenu vektora u vanjskom sustavu možemo napisati kao

$$dr'_{n,k} = dR_k + (d\phi \times \vec{r}_n)_k = dR_k + \sum_{ij} d\phi_i r_{n,j} \epsilon_{ijk}, \tag{3.15}$$



Slika 3.1: Valjak se kotrlja po horizontalnoj podlozi. Obodna brzina jednaka je brzini centra mase.

pa je derivacija jednaka

$$\frac{\partial r'_{n,k}}{\partial \phi_i} = \sum_j r_{n,j}\epsilon_{ijk}. \tag{3.16}$$

Nadalje, derivacija vanjskog potencijala po $r'_{n,k}$ jednaka je k-toj komponenti vanjske sile na n-tu česticu. Konačno, dolazimo do sljedećeg zaključka

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_i} = -\sum_{n,k} f_{n,k} r_{n,j}\epsilon_{ijk} = -\sum_n \left(\vec{r}_n \times \vec{f}_n\right)_i = -\sum_n \vec{n}_n = -\vec{N}, \tag{3.17}$$

gdje $\vec{N}$ označava ukupni moment sile na kruto tijelo s obzirom na točku koju smo izabrali kao ishodište sustava vezanog uz kruto tijelo. Jednadžba gibanja glasi

$$I'\dot{\vec{\Omega}} + \frac{d}{dt}\left(\vec{a} \times \vec{P}\right) = \vec{N}. \tag{3.18}$$

Prvi član zapravo predstavlja množenje matrice (tenzor inercije) i vektora (promjena kutne brzine)

$$\left(I'\dot{\vec{\Omega}}\right)_k = \sum_j I'_{kj}\dot{\Omega}_j. \tag{3.19}$$

3.2 Primjer: kotrljanje po podlozi

Kotrljanje po podlozi predstavlja primjer neholonomne veze jer postavlja uvjet na vremensku ovisnost varijabli. Brzina gibanja tijela ovisi o brzini promjene točke kontakta, odnosno brzina centra valjka jednaka je obodnoj brzini

$$V = r\dot{\theta}. \tag{3.20}$$

Homogeni valjak

Promotrimo prvo slučaj homogenog valjka, čiji se centar mase nalazi u središtu presjeka valjka. Kinetička energija valjka je suma doprinosa translacije i rotacije

$$T = T_{tr} + T_{rot} = \frac{1}{2}\mu\vec{V}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\mu R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2. \tag{3.21}$$

Miješoviti članov ne doprinosi jer je ishodište sustava vezanog uz valjak točno u centru mase valjka. Uvrstimo li moment inercije homogenog valjka dolazimo do kinetičke energije homogenog valjka koji se kotrlja po podlozi

$$T = \frac{3}{4}\mu R^2\dot{\theta}^2. \tag{3.22}$$

Nehomogeni valjak

Nešto složeniji slučaj je valjak koji je nehomogen po kružnom presjeku. Centar mase valjka više se ne nalazi u središtu presjeka valjka, nego je od njega udaljen za a. Označimo s I_O moment tromosti oko središta valjka. Os rotacije više ne prolazi kroz centar mase pa kinetička energija ima i mješoviti doprinos

$$T = \frac{1}{2}\mu\vec{V}^2 + \mu\vec{V}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{a}\right) + \frac{1}{2}I_0\vec{\Omega}^2. \tag{3.23}$$

Brzina centra mase opet je povezana s brzinom kotrljanja $V = R\dot{\theta}$. Preuredimo mješoviti produkt

$$\vec{V}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{a}\right) = \vec{\Omega}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{V}\right), \tag{3.24}$$

a zatim izračunamo vektorski produkt

$$\vec{a}\times\vec{V} = aV\sin\left(\theta+\pi/2\right)\left(-\vec{\Omega}_0\right) = -aV\cos\theta\vec{\Omega}_0. \tag{3.25}$$

Vratimo se mješovitom članu u kinetičkoj energiji

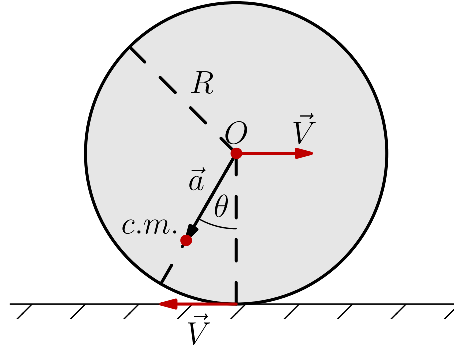
$$T_2 = -\mu aV\cos\theta\dot{\theta} = -\mu aR\cos\theta\dot{\theta}^2. \tag{3.26}$$

Translatorni doprinos mnogo je jednostavniji

$$T_1 = \frac{1}{2}\mu\vec{V}^2 = \frac{1}{2}\mu R^2\dot{\theta}^2. \tag{3.27}$$

Moment inercije s obzirom na točku O možemo izračunati pomoću Steinerovog teorema

$$I_O = I_{c.m.} + \mu a^2, \tag{3.28}$$



Slika 3.2: Centar mase nehomogenog valjka ne nalazi se u središtu presjeka valjka, već je udaljen za a od njega.

pa je rotacioni doprinos kinetičkoj energiji

$$T_3 = \frac{1}{2} I_I \vec{\Omega}^2 = \frac{1}{2} \left(I_{c.m.} + \mu a^2 \right) \dot{\theta}^2. \tag{3.29}$$

Dakle, ukupna kinetička energija valjka iznosi

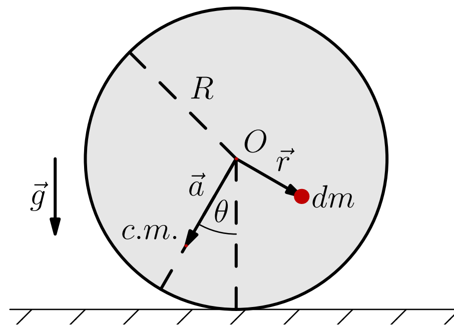
$$T = \frac{1}{2} \mu \left[R^2 - 2aR\cos\theta + a^2 \right] \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{c.m.} \dot{\theta}^2. \tag{3.30}$$

Da bi napisali Lagrangian potrebna nam je gravitacijska potencijalna energija valjka. Valjak dijelimo na infinitezimalne elemente, a zatim sumiramo po svim doprinosima. Tijelo je kontinuirano pa suma prelazi u integral

$$U = -g \int \rho(\vec{r}) \vec{k} \cdot \vec{r} d^3 r = -g\vec{k} \cdot \int \rho(\vec{r}) \vec{r} d^3 r. \tag{3.31}$$

Prepoznamo li definiciju centra mase

$$U = -\mu g \vec{k} \cdot \vec{a} = -\mu g a \cos\theta. \tag{3.32}$$



Slika 3.3: Gravitacijska potencijalna energija je suma svih infinitezimalnih dijelova valjka. Suma u tom slučaju prelazi u integral.

Lagrangian valjka je razlika kinetičke i potencijalne energije

$$L = \frac{1}{2}\mu\left[R^2 - 2aR\cos\theta + a^2\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{c.m.}\dot{\theta}^2 + \mu g a\cos\theta. \tag{3.33}$$

Lagrangeova jednadžba gibanja glasi

$$\mu\left[\frac{I_{c.m.}}{\mu} + R^2 - 2aR\cos\theta + a^2\right]\ddot{\theta} + \mu aR\sin\theta\dot{\theta}^2 + g\mu a\sin\theta = 0. \tag{3.34}$$

Lagrangian ne ovisi eksplicitno o vremenu, što znači da je energija sačuvana

$$E = \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - L = \frac{1}{2}\mu\left[R^2 - 2aR\cos\theta + a^2\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{c.m.}\dot{\theta}^2 - \mu g a\cos\theta. \tag{3.35}$$

Primjer 3.1

Homogeni štap mase M i duljine $2a$ kreće se bez trenja u sfernom udubljenju polumjera R tako da stalno ostaje u okomitoj ravnini koja prolazi kroz centar sfere. Nađite Lagrangian sistema, E-L jednadžbu i frekvenciju malih oscilacija štapa.

Kinetičku energiju štapa izračunali smo u jednom od prethodnih primjera

$$T = \frac{M}{2}\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right)\dot{\phi}^2. \tag{3.36}$$

Gravitacijska potencijalna energija štapa

$$V = -Mgz_{c.m.} = -Mg\sqrt{R^2 - a^2}\cos\phi. \tag{3.37}$$

Napišemo Lagrangian štapa

$$L = T - V = \frac{M}{2}\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right)\dot{\phi}^2 + Mg\sqrt{R^2 - a^2}\cos\phi. \tag{3.38}$$

Jednadžba gibanja glasi

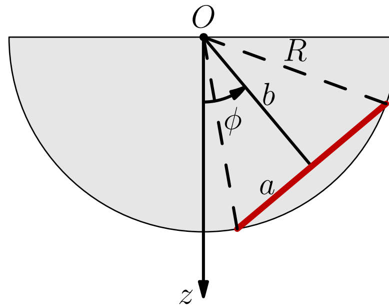
$$\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right)\ddot{\phi} + g\sqrt{R^2 - a^2}\sin\phi = 0. \tag{3.39}$$

U slučaju malih oscilacija štapa vrijedi $\sin\phi \approx \phi$ pa se jednadžba gibanja svodi na jednadžbu harmoničkog oscilatora

$$\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right)\ddot{\phi} + g\sqrt{R^2 - a^2}\phi = 0 \Longrightarrow \ddot{\phi} + g\frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R^2 - \frac{2}{3}a^2} = 0. \tag{3.40}$$

Frekvencija malih oscilacija

$$\Omega^2 = g\frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R^2 - \frac{2}{3}a^2}. \tag{3.41}$$



Slika 3.4: Štap duljine $2a$ klizi po unutrašnjosti sfernog udubljenja radijusa R.

Primjer 3.2

Dva homogena štapa duljine a i b spojena su pod pravim kutem u točki O na osovinu koja rotira konstantnom kutnom brzinom ω. Nađite Lagrangian, jednadžbu gibanja i konstantu gibanja. Izračunajte $\omega(\phi)$ u položaju ravnoteže.

Kinetičku energiju smo izračunali u jednom od prethodnih zadataka

$$T = \frac{\lambda}{6}\left[\left(a^3 \sin^2\phi + b^3 \cos^2\phi\right)\omega^2 + \left(a^3 + b^3\right)\dot{\phi}^2\right]. \tag{3.42}$$

Gravitacijska potencijalna energija pojedinih štapova glasi

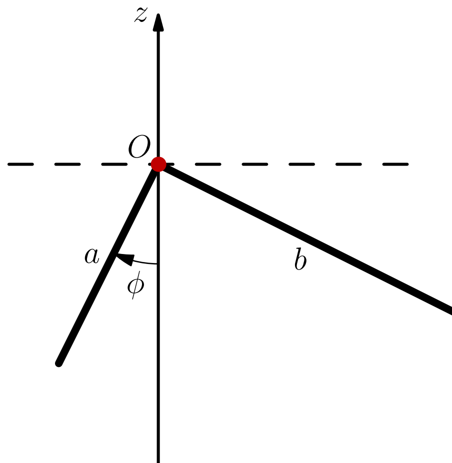
$$V(a) = m_a g z_{c.m.}(a) = -m_a g \frac{a}{2}\cos\phi, \quad V(b) = m_b g z_{c.m.}(b) = -m_b g \frac{b}{2}\sin\phi, \tag{3.43}$$

pri čemu smo točku O odabrali kao referentnu točku. Ukupna potencijalna energija je zbroj doprinosa pojedinih štapova

$$V = -\frac{g}{2}\left(m_a a\cos\phi + m_b b\sin\phi\right) = -\frac{g\lambda}{2}\left(a^2\cos\phi + b^2\sin\phi\right). \tag{3.44}$$

Slijedi Lagrangian sustava

$$L = \frac{\lambda}{6}\left[\left(a^3 \sin^2\phi + b^3 \cos^2\phi\right)\omega^2 + \left(a^3 + b^3\right)\dot{\phi}^2\right] + \frac{g\lambda}{2}\left(a^2\cos\phi + b^2\sin\phi\right), \tag{3.45}$$



Slika 3.5: Štapovi spojeni pod pravim kutem rotiraju konstatnom kutnom brzinom $\vec{\omega}$ oko vertikalne osi. Sustav se nalazi u homogenom gravitacijskom polju.

iz kojeg možemo izvesti jednadžbu gibanja

$$2\left(a^3+b^3\right)\ddot{\phi}-\omega^2\left(a^3-b^3\right)\sin 2\phi-3g\left(b^2\cos\phi-a^2\sin\phi\right)=0. \tag{3.46}$$

Lagrangian ne ovisi eksplicitno o vremenu pa je veličina $E=\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}-L$ konstanta gibanja

$$E=\frac{\lambda}{6}\left(a^3+b^3\right)\dot{\phi}^2+\frac{\lambda}{12}\omega^2\left(a^3-b^3\right)\cos 2\phi-\frac{g}{2}\lambda\left(b^2\sin\phi+a^2\cos\phi\right). \tag{3.47}$$

Pretpostavimo sada da se sustav nalazi u ravnoteži za vrijednost kuta ϕ, što znači da vrijedi $\ddot{\phi}=0$. Slijedi veza između kutne brzine ω i kuta ϕ

$$-\omega^2\left(a^3-b^3\right)\sin 2\phi-3g\left(b^2\cos\phi-a^2\sin\phi\right)=0 \tag{3.48}$$

$$\Longrightarrow \omega^2(\phi)=\frac{3g}{a^3-b^3}\frac{\sin 2\phi}{a^2\sin\phi-b^2\cos\phi}. \tag{3.49}$$

Primjer 3.3

Kraj štapa AB mase m i duljine $2a$ može kliziti bez trenja duž vertikalne žice Oz. Kraj B učvršćen je za točku O napetom žicom OB duljine $l = 2a$. Vertikalna ravnina OBA rotira oko osi z kutnom brzinom $\dot{\phi}$. Nađite Lagrangian sustava. Ako su zadani početni uvjeti

$$\theta_0 = \frac{\pi}{3}\,, \quad \dot{\theta}_0 = 0 \quad \text{i} \quad \dot{\phi}_0 = \sqrt{\frac{12g}{a}}\,,$$

izračunajte konstante gibanja.

Kinetičku energiju smo izračunali u jednom od prethodnih primjera

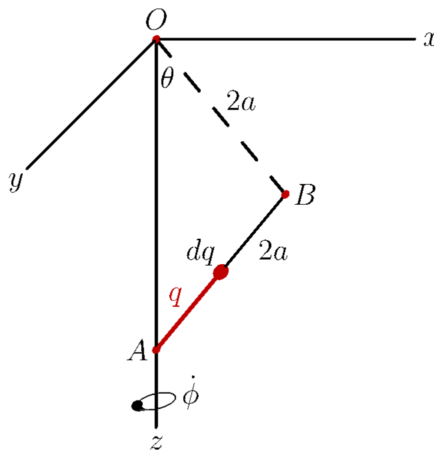
$$T = \frac{2}{3}ma^2\left[\left(1 + 6\sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right]. \tag{3.50}$$

Gravitacijska potencijalna energija štapa

$$U = -mgz_{c.m.} = -mg\left(2a\cos\theta + a\cos\theta\right) = -3mga\cos\theta. \tag{3.51}$$

Lagrangian štapa

$$L = T - U = \frac{2}{3}ma^2\left[\left(1 + 6\sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right] + 3mga\cos\theta. \tag{3.52}$$



Slika 3.6: Štap AB pričvršćen je napetom žicom za točku O. Ravnina OAB rotira oko osi z. Sustav se nalazi u homogenom gravitacijskom polju.

Lagrangian ne ovisi eksplicitno o vremenu pa je sljedeća veličina konstanta gibanja

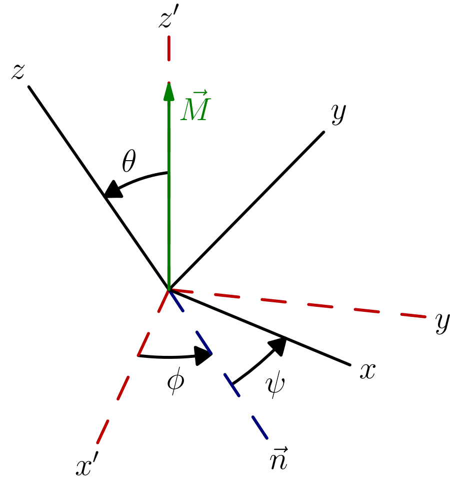
$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - L = \frac{2}{3} m a^2 \left[\left(1 + 6 \sin^2 \theta\right) \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] - 3 m g a \cos \theta. \quad (3.53)$$

Osim toga, Lagrangian ne ovisi ni o varijabli ϕ pa je pripadni generalizirani impuls konstanta gibanja

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{4}{3} m a^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}. \quad (3.54)$$

Uvrstimo li početne uvjete, dolazimo do vrijednosti konstanti gibanja

$$E = \frac{9}{2} m g a \quad \text{i} \quad p_\phi = m a \sqrt{12 g a}. \quad (3.55)$$



Slika 3.7: Moment količine gibanja je sačuvan ako na zvrk ne djeluju vanjske sile. Vanjski sustav orjentiramo tako da os z' ima smjer vektora momenta količine gibanja $\vec{M}$. Os z sustava vezanog uz zvrk ujedno je i os simetrije zvrka.

3.3 Primjer: slobodan simetričan zvrk

Analiza gibanja slobodnog simetričnog zvrka

Pretpostavimo da je zvrk slobodan. To znači da na njega ne djeluje nikakav moment sile, odnosno da je moment količine gibanja sačuvan

$$\dot{\vec{M}} = \vec{N} = 0 \Longrightarrow \vec{M} = \text{konst.} \tag{3.56}$$

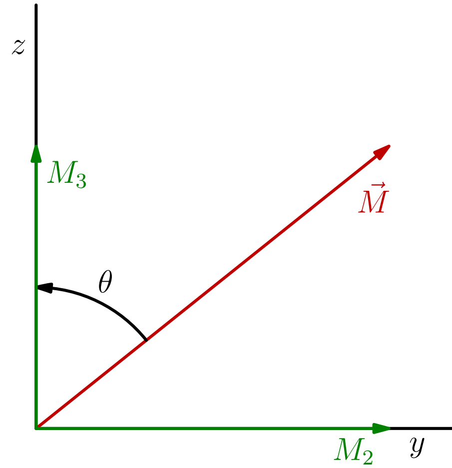
Vanjski koordinatni sustav orjentiramo tako da os z' poklapa sa smjerom vektora momenta količine gibanja

$$\vec{M} = M\vec{k}'. \tag{3.57}$$

Sustav vezan uz zvrk postavimo tako da je os z tog sustava ujedno i os simetrije zvrka. Za početak, promotrimo zvrk u trenutku kada se os x poklapa s čvornim pravcem, odnosno vrijedi $\psi = 0$. Osi y i z nalaze se u istoj ravnini kao i vektor momenta količine gibanja $\vec{M}$ pa projekcija vektora $\vec{M}$ na os x iščezava $M_1 \equiv M_x = 0$. Osi sustava vezanog uz zvrk ujedno su i glavne osi zvrka pa je moment količine gibanja jednak

$$\vec{M} = I\Omega_1\vec{i} + I\Omega_2\vec{j} + I_3\Omega_3\vec{k}, \tag{3.58}$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da je zvrk simetričan $I_1 = I_2 \equiv I$. Prisjetimo li se



Slika 3.8: Projekcije vektora momenta količine gibanja na glavne osi zvrka.

komponenata kutne brzine u pomičnom sustavu

$$\Omega_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi, \tag{3.59}$$

$$\Omega_2 = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi, \tag{3.60}$$

$$\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta, \tag{3.61}$$

i uvrstimo $\psi = 0$ u prvu jednadžbu

$$\Omega_1(\psi = 0) = \dot{\theta}(\psi = 0). \tag{3.62}$$

Upotrijebimo li zadnji izraz u kombinaciji s $M_1 = I\Omega_1 = 0$, slijedi

$$\dot{\theta}(\psi = 0) = 0. \tag{3.63}$$

Promatramo ravninu yz. Projekcije momenta količine gibanja na glavne osi zvrka

$$M_2 = M\sin\theta \quad \text{i} \quad M_3 = M\cos\theta. \tag{3.64}$$

Uvrstimo vrijednost $\psi = 0$ u jedn. (3.60) i (3.61)

$$\Omega_2 = \dot{\phi}\sin\theta \tag{3.65}$$

$$\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta. \tag{3.66}$$

Usporedba s jedn. (3.64) vodi na sljedeće zaključke

$$M_2 = I_2\Omega_2 = I_2\dot{\phi}\sin\theta = M\sin\theta \Longrightarrow \dot{\phi} = \frac{M}{I_2}, \tag{3.67}$$

$$M_3 = I_3\Omega_3 = I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right) = M\cos\theta. \tag{3.68}$$

Prema pretpostavci, zvrk je simetričan, odnosno vrijedi $I_1 = I_2 \equiv I$. Izbor odgovarajućih glavnih osi je u tom slučaju proizvoljan, pod uvjetom da su okomite na treću glavnu os. U svakom trenutku, sustav vezan uz tijelo možemo izabrati tako da se glavna os x poklapa s čvornim pravcem, što znači da je kut θ konstantan. Drugim riječima, zvrk se giba tako da je kut između osi simetrije (os z sustava vezanog uz tijelo) i vektora kutne količine gibanja stalan. Os simetrije zvrka vrti se oko vektora kutne količine gibanja konstantnom kutnom brzinom

$$\dot{\phi} = \frac{M}{I}. \tag{3.69}$$

Pritom se zvrk vrti oko svoje osi simetrije kutnom brzinom

$$\Omega_3\frac{M_3}{I_3} = \frac{M\cos\theta}{I_3}. \tag{3.70}$$

Kut θ je konstantan pa je i kutna brzina Ω_3 konstantna. Konačno, možemo izračunati brzinu promjene kuta ψ

$$\dot{\psi} = \Omega_3\frac{I - I_3}{I} = M\cos\theta\frac{I - I_3}{II_3}. \tag{3.71}$$

Dva slučaja su posebno jednostavna

1. Os simetrije zvrka podudara se s vektorom momenta količine gibanja i s vektorom kutne brzine Ω

   $$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = \frac{M}{I_3}. \tag{3.72}$$

   U tom slučaju nema precesije, a zvrk se vrti oko svoje osi simetrije.

2. Zvrk se vrti oko jedne od glavnih osi x ili y.

Lagrangeove jednadžbe za slobodan simetričan zvrk

Lagrangian slobodnog simetričnog zvrka, napisan pomoću Eulerovih kuteva glasi

$$L = \frac{1}{2}\left[I_1\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right) + I_3\Omega_3^2\right] = \frac{1}{2}\left[I_1\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2\right]. \tag{3.73}$$

Lagrangian ne ovisi o koordinatama ϕ i ψ pa su pripadni generalizirani impulsi konstante gibanja

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \sin^2\theta \dot{\phi} + I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)\cos\theta, \tag{3.74}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right) = I_3\Omega_3 = M_3. \tag{3.75}$$

Generalizirani impuls p_ϕ odgovara projekciji momenta količine gibanja na os z' nepomičnog sustava, u što se možemo uvjeriti sljedećim postupkom. Pomnožimo vektor momenta količine gibanja $\vec{M}$ s jediničnim vektorom $\vec{k}'$

$$M_{z'} = \vec{M}\cdot\vec{k}' = M_1\vec{i}\cdot\vec{k}' + M_2\vec{j}\cdot\vec{k}' + M_3\vec{k}\cdot\vec{k}'. \tag{3.76}$$

Iskoristimo rezultate iz odjeljka 1.3 da bi izračunali skalarne produkte

$$M_{z'} = M_1\sin\theta\sin\psi + M_2\sin\theta\cos\psi + M_3\cos\theta, \tag{3.77}$$

a zatim uvrstimo komponente kutne brzine u pomičnom sustavu

$$M_{z'} = I_1\sin^2\theta\dot{\phi} + I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)\cos\theta = p_\phi. \tag{3.78}$$

Treća EL jednadžba glasi

$$I_1\ddot{\theta} = I_1\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta - I_3\sin\theta\dot{\phi}\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right). \tag{3.79}$$

Kutne brzine $\dot{\phi}$ i $\dot{\psi}$ možemo izraziti pomoću generaliziranih impulsa p_ϕ i p_ψ

$$\frac{M_3}{I_3} = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta, \quad \dot{\phi} = \frac{M_{z'} - M_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}, \tag{3.80}$$

pa se jednadžba gibanja svodi na

$$I_1\ddot{\theta} = \frac{M_{z'} - M_3\cos\theta}{I_1\sin^3\theta}\left(M_{z'}\cos\theta - M_3\right). \tag{3.81}$$

Posebno rješenje prethodne jednadžbe dano je omjerom $\cos\theta = M_3/M_{z'}$. Budući da su M_3 i $M_{z'}$ konstante, θ je također konstanta pa lijeva strana jedn. (3.81) iščezava. Ovakvo rješenje odgovara izboru vanjskog koordinatnog sustava kojem je os z' usmjerena duž vektora momenta količine gibanja $\vec{M}$, odnosno

$$M_{z'} = M \quad \text{i} \quad M_3 = M\cos\theta. \tag{3.82}$$

Nadalje slijedi da je kutna brzina $\dot{\phi}$ jednaka omjeru $\dot{\phi} = M/I_1$. Uz ovakvu orjentaciju vanjskog koordinatnog sustava, energija zvrka jednaka je zbroju doprinosa precesije i vrtnje oko osi z pomičnog sustava.

$$E = \frac{1}{2I_1} M^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2I_3} M^2 \cos^2\theta. \tag{3.83}$$

Ukoliko vrijedi $\theta = 0$ sva energija pripada vrtnji, dok za $\theta = \pi/2$ sva energija pripada precesiji. Drugačiji izbor vanjskog koordinatnog sustava bi vodio na rješenje složenijeg oblika.

3.4 Primjer: simetričan zvrk u polju sile teže

3.4.1 Jednadžbe gibanja, precesija i nutacija

Promatramo simetričan zvrk na podlozi u homogenom polju sile teže. Pretpostavljamo da se zvrk vrti tako da mu je točka kojom dodiruje podlogu fiksna. Točku dodira s podlogom odaberemo kao ishodište vanjskog sustava. Os z' vanjskom sustava orjentiramo tako da vrijedi

$$\vec{g} = -g\vec{k}. \tag{3.84}$$

Moment količine gibanja zvrka više nije konstanta jer na zvrk djeluje moment sile teže. Sustav vezan uz zvrk orjentiramo tako da se os z poklapa s osi simetrije zvrka. Označimo s a udaljenost centra mase zvrka od podloge. Pomoću Steinerovog teorema možemo izračunati momente tromosti zvrka u odnosu na točku dodira s podlogom

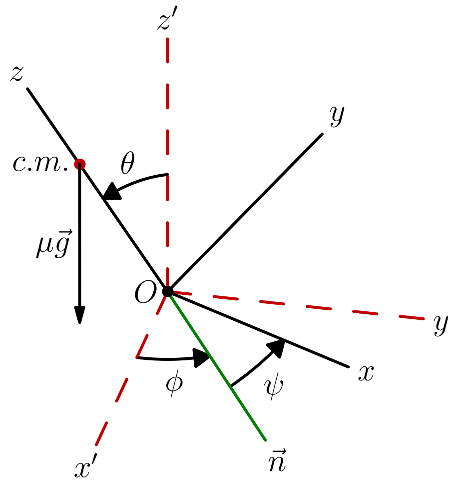
$$I_1' = I_2' \equiv I' = I + \mu a^2 \quad \text{i} \quad I_3' = I_3. \tag{3.85}$$

Pri opisu gibanja zvrka, kao generalizirane koordinate koristit ćemo Eulerove kuteve. Formulu za kinetičku energiju simetričnog zvrka smo već izveli pa trebamo samo još potencijalnu energiju

$$U = -\mu g z'_{c.m.} = \mu g a \cos\theta. \tag{3.86}$$

Ukupni Lagrangian zvrka glasi

$$L = \frac{I'}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2 - \mu g a \cos\theta. \tag{3.87}$$



Slika 3.9: Koordinatni sustavi koje koristimo pri opisu gibanja zvrka na podlozi. Sustav $x'y'z'$ označava vanjski (fiksni) sustav, dok xyz označava sustav vezan uz zvrk. Točka O, ishodište oba sustava, je ujedno i točka dodira zvrka s podlogom. Os z odgovara osi simetrije zvrka pa se centar mase nalazi na njoj i udaljen je za a od točke O. Vanjski sustav je orjentiran tako da vektor ubrzanja sile teže ima smjer $-\vec{k}'$. Kao generalizirane koordinate koristimo Eulerove kuteve.

Kao i u slučaju slobodnog simetričnog zvrka, Lagrangian ne ovisi o Eulerovim kutevima ψ i ϕ, što znači da su pripadni generalizirani impulsi konstante gibanja

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta \right), \tag{3.88}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \left(I' \sin^2\theta + I_3 \cos^2\theta \right) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos\theta. \tag{3.89}$$

Generalizirani impuls p_ψ odgovara projekciji momenta količine gibanja na glavnu os zvrka, dok impuls p_ϕ odgovara projekciji momenta količine gibanja na os z' vanjskog sustava. Dosad smo našli dvije konstante gibanja

$$p_\psi = M_3 \quad \text{i} \quad p_\phi = M_{z'}. \tag{3.90}$$

Projekcije momenta količine gibanja su sačuvane jer su projekcije momenta sile teže na osi z i z' jednake nuli. Treća konstanta gibanja je energija jer Lagrangian ne ovisi eksplicitno o vremenu

$$E = \frac{I'}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta \right)^2 + \mu g a \cos\theta. \tag{3.91}$$

Eliminiramo li generalizirane brzine $\dot{\phi}$ i $\dot{\psi}$ iz izraza za energiju, problem ćemo svesti na jednu dimenziju. Prvo iz jedn. (3.88) izrazimo $\dot{\psi}$

$$\dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} - \dot{\phi}\cos\theta, \tag{3.92}$$

zatim ga uvrstimo u jedn. (3.89)

$$M_{z'} = I'\sin^2\theta\dot{\phi} + M_3\cos\theta, \tag{3.93}$$

i konačno izračunamo $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{M_{z'} - M_3\cos\theta}{I'\sin^2\theta}. \tag{3.94}$$

Energija zvrka ovisi samo o kutu θ i pripadnoj generaliziranoj brzini $\dot{\theta}$

$$E = \frac{I'}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(M_{z'} - M_3\cos\theta)^2}{2I'\sin^2\theta} + \frac{M_3^2}{2I_3} + \mu ga\cos\theta. \tag{3.95}$$

Početni problem s tri stupnja slobode uspjeli smo svesti na gibanje u jednodimenzionalnom efektivnom potencijalu

$$U_{eff}(\theta) = \frac{(M_{z'} - M_3\cos\theta)^2}{2I'\sin^2\theta} + \mu ga\cos\theta, \tag{3.96}$$

Jedn. (3.95) možemo integrirati

$$\frac{I'}{2}\dot{\theta}^2 = E - U_{eff}(\theta) - \frac{M_3^2}{2I_3} \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{I_1'}{2}}\int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\theta'}{\sqrt{E - \frac{M_3^2}{2I_3} - U_{eff}(\theta')}}, \tag{3.97}$$

iako najčešće samo numerički. Da bi detaljnije proučili gibanje zvrka, uvodimo supstituciju

$$u \equiv \cos\theta \Longrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{\dot{u}^2}{1-u^2}. \tag{3.98}$$

Jedn. (3.95) poprima oblik

$$E = \frac{I'}{2}\frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + \frac{M_3^2}{2I_3} + \frac{I'}{2(1-u^2)}\left(\frac{M_{z'}}{I'} - \frac{M_3}{I'}u\right)^2 + \mu gau. \tag{3.99}$$

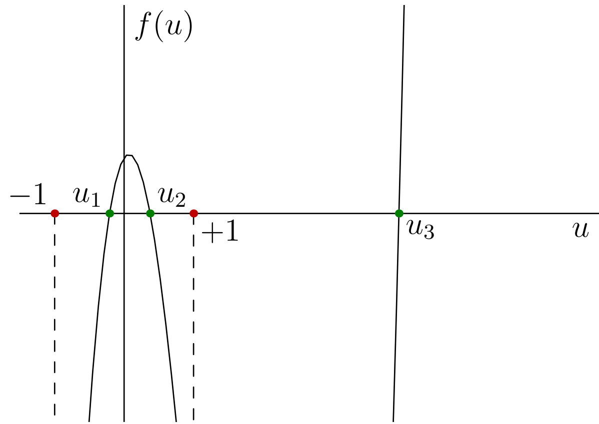
Radi kratkoće pisanja, definiramo još nekoliko pomoćnih parametara

$$m_z \equiv \frac{M_{z'}}{I'}, \quad m_3 \equiv \frac{M_3}{I'}, \quad \beta \equiv \frac{2\mu ga}{I'}, \quad \alpha \equiv \frac{2}{I'}\left(E - \frac{M_3^2}{2I_3}\right), \tag{3.100}$$

i sačuvanje energije poprima oblik

$$\dot{u}^2 = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (m_z - m_3 u)^2 \equiv f(u). \tag{3.101}$$

Varijabla $u = \cos\theta$ može poprimiti samo vrijednosti u intervalu $-1 \leq u \leq 1$. $f(u)$ je kubna funkcija za koju vrijedi



Slika 3.10: Graf funkcije $f(u)$. Funkcija neograničeno raste za $u \to \infty$ i neograničeno pada za $u \to -\infty$. U točkama ± 1 funkcija $f(u)$ je negativna. Postoje tri nultočke, od kojih se dvije nalaze u intervalu $[-1, 1]$ (u_1 i u_2), a jedna izvan njega (u_3).

1. $f(u \to \infty) \to +\infty$,

2. $f(u \to -\infty) \to -\infty$,

3. $f(\pm 1) = -(m_z \mp m_3)^2 \leq 0$.

Dakle, u intervalu $-1 \leq u \leq 1$ postoje ili dvije ili ni jedna nultočka. Kut θ, odnosno smjer osi simetrije zvrka prema vertikali, se periodički mijenja između $\theta_1 = \arccos u_1$ i $\theta_2 = \arccos u_2$. Takvo ponašanje zvrka zovemo nutacija. Da bismo vidjeli kako se mijenja položaj osi simetrije zvrka u azimutalnom smjeru fiksnog sustava, vratimo se jedn. (3.94)

$$\dot{\phi} = \frac{m_z - m_3 u}{1 - u^2}. \tag{3.102}$$

Očito, nazivnik je uvijek pozitivan, dok brojnik mijenja predznak ako je ispunjen uvjet

$$u_0 = m_z / m_3. \tag{3.103}$$

Ukoliko je u_0 izvan područja $u_1 \leq u \leq u_2$, $\dot{\phi}$ uvijek zadržava isti predznak, odnosno os zvrka precesira monotono. U suprotnom slučaju, kutna brzina $\dot{\phi}$ ima suprotne predznake u točkama $u = u_1$ i $u = u_2$ pa precesija više nije monotona.

3.4.2 Numeričko rješenje jednadžbi gibanja

Promatramo homogeni zvrk u obliku stošca visine h i radijusa R. Centar mase stošca udaljen je za $a = \frac{3}{4}R$ od vrha stošca. Da bi jednadžbe gibanja simetričnog zvrka riješili numerički, najprikladnije ih je napisati kao sustav od šest diferencijalnih jednadžbi prvog reda

$$\dot{\phi} = v_\phi, \tag{3.104}$$

$$\dot{v}_\phi = \frac{I_3}{I'}\left(\frac{v_\phi v_\theta \cos\theta}{\sin\theta} + \frac{v_\psi v_\theta}{\sin\theta}\right) - 2v_\phi v_\theta \cot\theta, \tag{3.105}$$

$$\dot{\theta} = v_\theta, \tag{3.106}$$

$$\dot{v}_\theta = v_\phi^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{I_3}{I'}v_\phi\left(v_\psi + v_\phi\cos\theta\right)\sin\theta + \frac{\mu g a}{I'}\sin\theta, \tag{3.107}$$

$$\dot{\psi} = v_\psi, \tag{3.108}$$

$$\dot{v}_\psi = v_\phi v_\theta \sin\theta + 2v_\phi v_\theta \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} - \frac{I_3}{I'}\left(\frac{\dot{\phi}\dot{\theta}\cos^2\theta}{\sin\theta} + \dot{\psi}\dot{\theta}\cot\theta\right). \tag{3.109}$$

Kao početne uvjete odaberemo

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \phi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, v_\psi(0) = v_\psi^{(0)}, \quad v_\theta(0) = v_\theta^{(0)}, \quad v_\phi(0) = v_\phi^{(0)}, \tag{3.110}$$

a problem rješavamo koristeći rutinu *odeint* iz SciPy modula. Numeričku preciznosti možemo provjeriti na nekoliko načina

1. Jednadžbe prvo integriramo od $t = 0$ do $t = t_{max}$, a zatim unatrag od $t = t_{max}$ do $t = 0$. Ukoliko na taj način ne dođemo opet na početne uvjete (3.110), potrebno je smanjiti korak integracije.

2. Nakon svakog koraka integracije izračunamo vrijednosti p_ϕ, p_ψ i energije. Sve tri veličine moraju biti konstantne.

3. Numeričko rješenje kuta θ uvrstimo u formulu

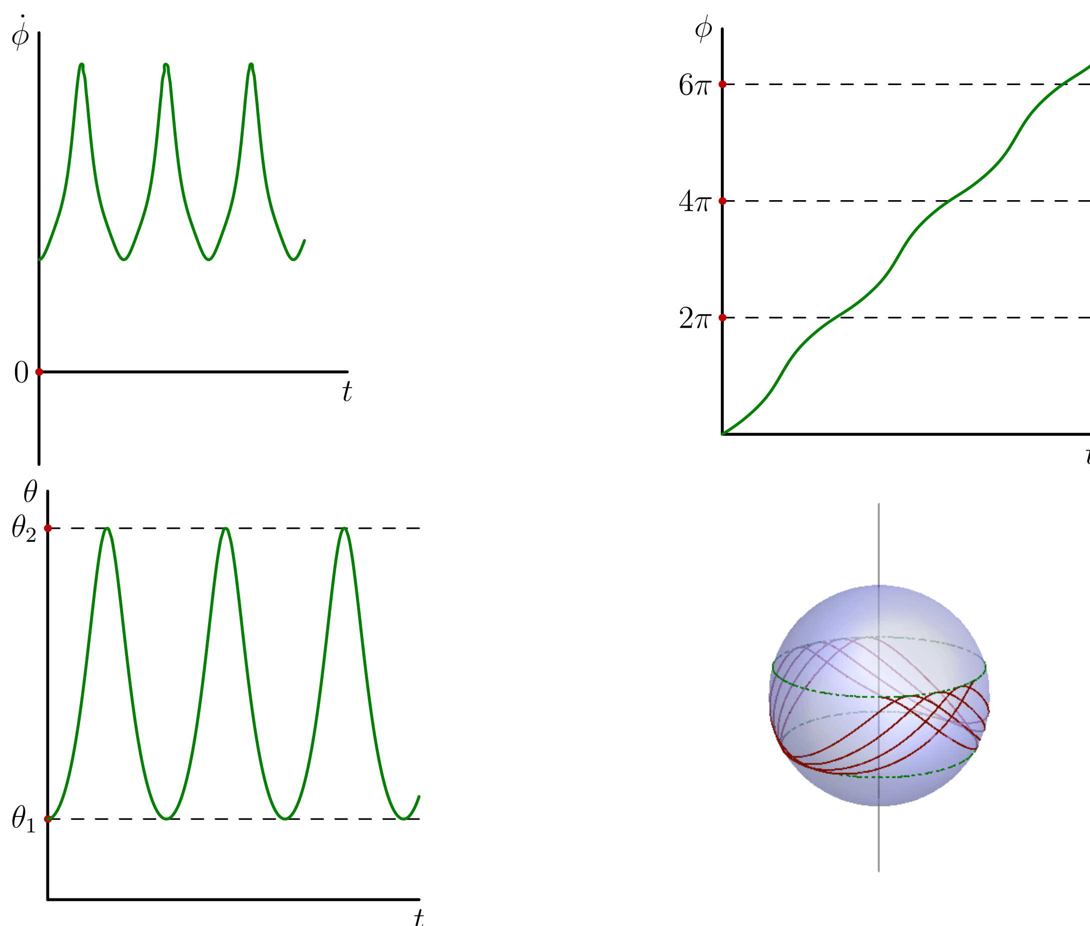
$$\dot{\phi} = \frac{m_z - m_3 u}{1 - u^2} = \frac{m_z - m_3\cos\theta}{\sin^2\theta}, \tag{3.111}$$

   a rezultat usporedimo s numeričkim rješenjem $\dot{\phi}$.

4. Izračunamo nul-točke funkcije $f(u)$ i provjerimo da li se numeričko rješenje $\cos\theta$ doista mijenja između vrijednosti nul-točaka u_1 i u_2.

Monotona precesija

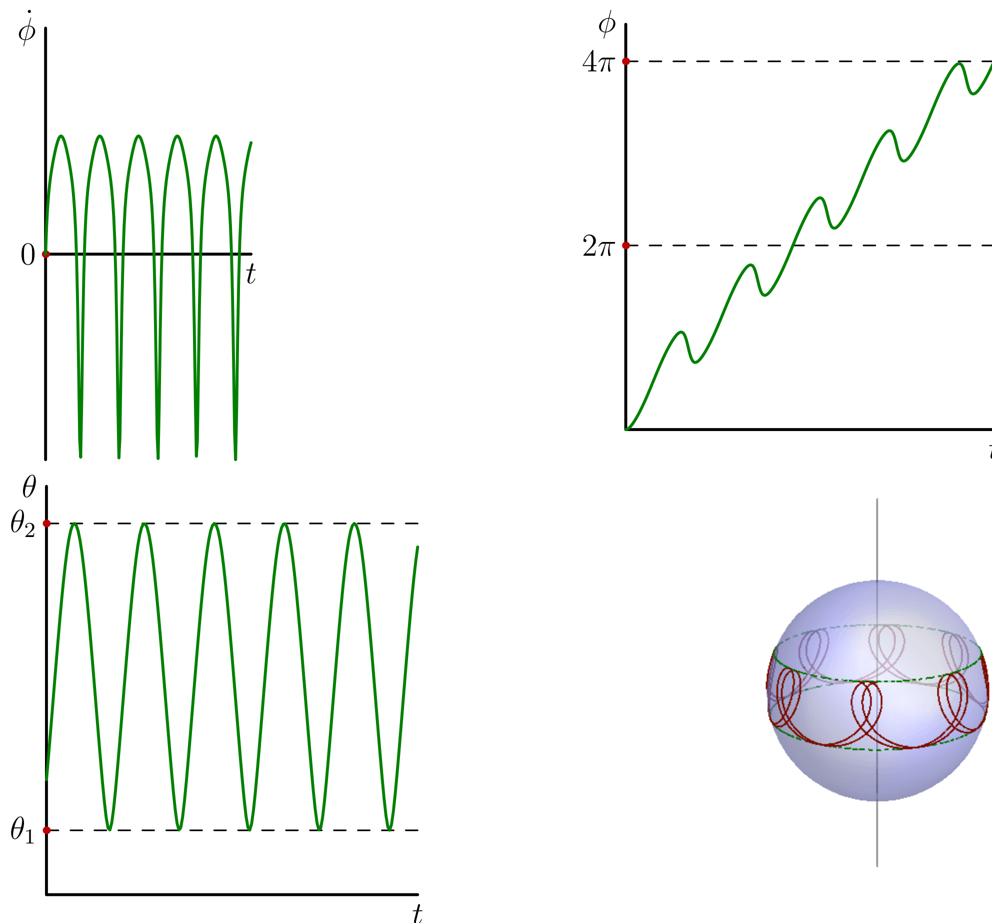
Pretpostavimo da točka u kojoj bi kutna brzina $\dot{\phi}$ mijenjala predznak ($u_0 = m_z/m_3$) leži izvan dozvoljenog intervala $[\theta_1, \theta_2]$. U tom slučaju kutna brzina $\dot{\phi}$ stalno ima isti predznak, a kut ϕ monotono raste (sl. 3.11, gornje dvije slike). Kut θ se mijenja između graničnih vrijednosti θ_1 i θ_2 (sl. 3.11, dole lijevo). Na zadnjoj slici je skica presjecišta osi simetrije zvrka sa sferom koja ilustrira gibanje zvrka. Kutna brzina $\dot{\phi}$ stalno ima isti predznak pa se zvrk stalno vrti u istom smjeru.



Slika 3.11: Monotona precesija.

Nemonotona precesija

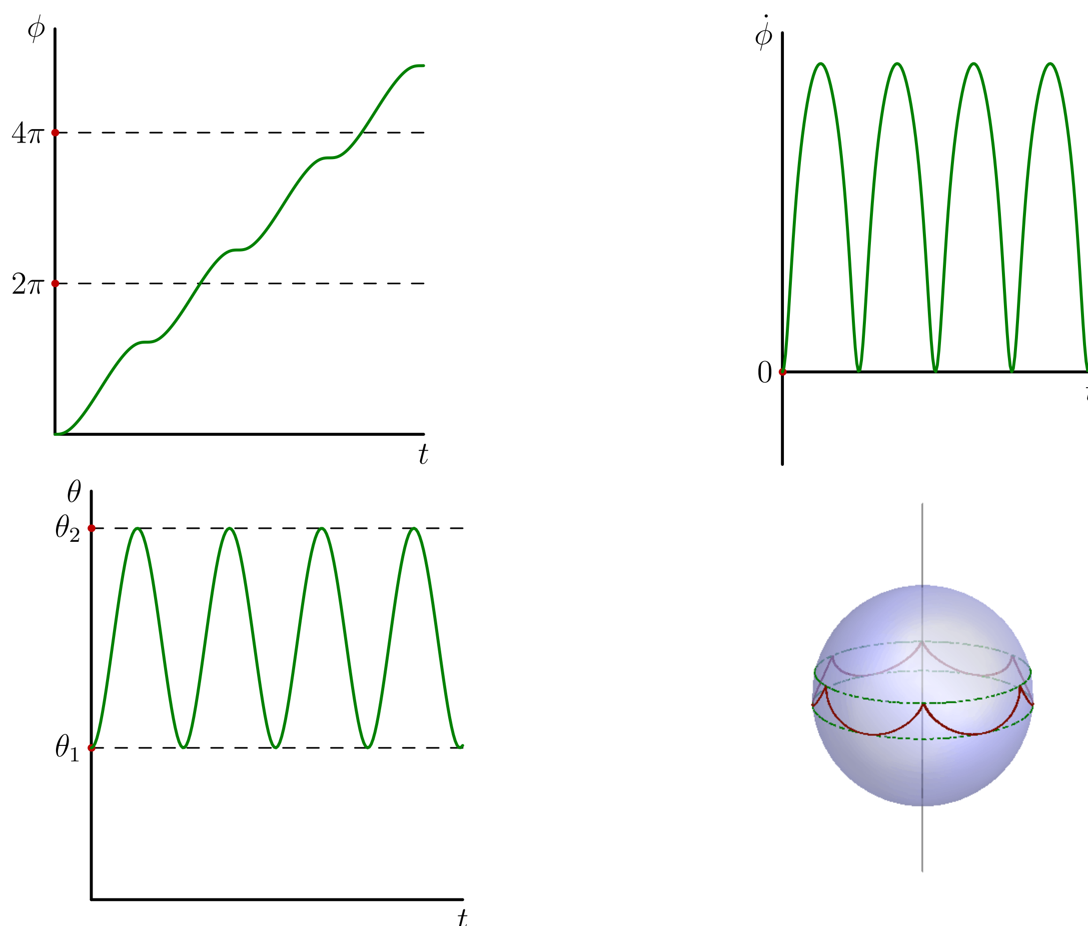
Pretpostavimo da točka u kojoj bi kutna brzina $\dot{\phi}$ mijenjala predznak ($u_0 = m_z/m_3$) leži unutar dozvoljenog intervala $[\theta_1, \theta_2]$. U tom slučaju kutna brzina $\dot{\phi}$ mijenja predznak kada kut θ prolazi kroz vrijednost $\arccos u_0$, a promjena kuta ϕ više nije monotona (sl. 3.12, gornje dvije slike). Kut θ se mijenja između graničnih vrijednosti θ_1 i θ_2 (sl. 3.12, dole lijevo). Na zadnjoj slici je skica presjecišta osi simetrije zvrka sa sferom. Kutna brzina $\dot{\phi}$ prolaskom kroz kut $\theta_0 = \arccos u_0$ mijenja predznak pa zvrk istovremeno mijenja smjer vrtnje.



Slika 3.12: Nemonotona precesija.

Granični slučaj

Pretpostavimo da točka u kojoj bi kutna brzina $\dot{\phi}$ mijenjala predznak ($u_0 = m_z/m_3$) leži na jednom od krajeva dozvoljenog intervala $[\theta_1, \theta_2]$. U tom slučaju kutna brzina $\dot{\phi}$ pada na nulu kada kut θ prolazi kroz vrijednost $\arccos u_0$, ali ne mijenja predznak. Graf funkcije $\phi(t)$ pokazuje obilježja infleksije (sl. 3.13). Kut θ se mijenja između graničnih vrijednosti θ_1 i θ_2 (sl. 3.13, dole lijevo). Na zadnjoj slici je skica presjecišta osi simetrije zvrka sa sferom. Kutna brzina $\dot{\phi}$ ne mijenja predznak pa se zvrk stalno vrti u istom smjeru.



Slika 3.13: Granica između monotone i nemonotone precesije.

3.4.3 Uspavani zvrk

Uspavanim zvrkom zovemo zvrk koji rotira tako da mu je glavna os vertikalna. To zapravo znači da su projekcije $M_{z'}$ i M_3 jednake

$$M_{z'} = M_3 = I_3 \Omega_3. \tag{3.112}$$

Efektivni potencijal poprima jednostavniji oblik

$$U_{eff}(\theta) = \frac{M_3^2}{2I'} \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + \mu g a \cos\theta. \tag{3.113}$$

Točka $\theta = 0$ je stabilno rješenje ukoliko je to minimum efektivnog potencijala. Uvjet stabilnosti možemo izvesti razvojem efektivnog potencijala oko točke $\theta = 0$

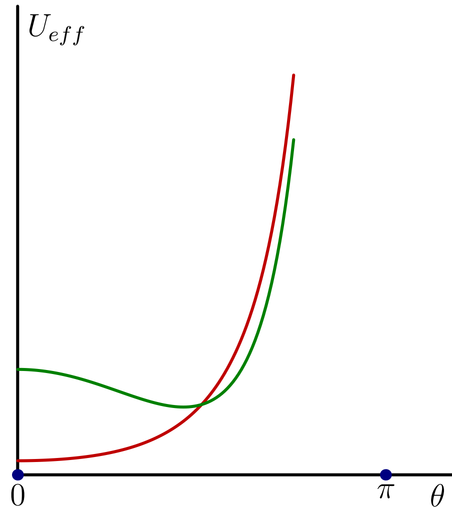
$$U_{eff}(\theta) \approx \frac{I_3^2 \Omega_3^2}{2I'} \frac{\theta^4/4}{\theta^2} + \mu g a - \mu g a \frac{\theta^2}{2} \tag{3.114}$$

$$U_{eff}(\theta) \approx \mu g a + \left(\frac{I_3^2 \Omega_3^2}{8I'} - \frac{1}{2}\mu g a \right) \theta^2. \tag{3.115}$$

Da bi točka $\theta = 0$ bila stabilan položaj ravnoteže, koeficijent uz član θ^2 mora biti pozitivan

$$\Omega_3^2 > \frac{4\mu g a I'}{I_3^2}. \tag{3.116}$$

Uvjet stabilnosti je lakše ostvariti ako je zvrk plosnat ($I_3 \gg I'$), kao i ako mu je centar mase blizu točke u kojoj dodiruje podlogu (a što manji). Masa zvrka ne utječe na uvjet stabilnosti jer su momenti inercije proporcionalni masi.



Slika 3.14: Dva tipa efektivnog potencijala. Crvena linija označava efektivni potencijal sa stabilnom točkom ravnoteže, a zelena s nestabilnom.

Zvrku na realnoj podlozi se zbog trenja postupno smanjuje kutna brzina Ω_3. Kada uvjet stabilnosti (3.116) više nije ispunjen, zvrk oživi, odnosno dolazi do nutacije i precesije.

4 Opis gibanja u sustavu zvrka

U dosadašnjim razmatranjima gibanje zvrka smo opisivali u odnosu na vanjski nepomični sustav. Često je, umjesto vanjskog sustava, jednostavnije koristiti sustav vezan uz kruto tijelo. Da bi koristili takav formalizam, prvo trebamo povezati vremensku promjenu vektora u vanjskom sustavu i sustavu koji se giba zajedno s krutim tijelom.

4.1 Promjena vektora u sustavu koji se giba

Pretpostavimo da je sustav $x'y'z'$ fiksiran, dok sustav xyz rotira u odnosu na njega. Dodatno, neka oba sustava imaju zajedničko ishodište. Označimo s $\frac{d\vec{A}}{dt}$ derivaciju vektora $\vec{A}$ za opžača u fiksnom sustavu, a s $\frac{d'\vec{A}}{dt}$ derivaciju istog vektora za opažača u pomičnom sustavu. Neka su $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$ jedinični vektori, a A_1, A_2 i A_3 komponente vektora $\vec{A}$ u pomičnom sustavu. Za opažača u fiksnom sustavu mijenjaju se i komponente i jedinični vektori pomičnog sustava

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \sum_i \frac{dA_i}{dt}\vec{e}_i + \sum_i A_i \frac{d\vec{e}_i}{dt}, \tag{4.1}$$

dok se za opažača u pomičnom sustavu mijenjaju samo komponente vektora

$$\frac{d'\vec{A}}{dt} = \sum_i \frac{dA_i}{dt}\vec{e}_i. \tag{4.2}$$

Uvrsimo li jedn. (4.2) u jedn. (4.1), dolazimo do relacije

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \sum_i A_i \frac{d\vec{e}_i}{dt}. \tag{4.3}$$

Za oba opažača jedinični vektori $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$ čine desni ortonormirani sustav pa uvijek vrijedi

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}. \tag{4.4}$$

Iz uvjeta normiranosti jediničnih vektora slijedi da je derivacija jediničnog vektora uvijek okomita na sam vektor

$$\frac{d}{dt}\vec{e}_i^{\,2} = 0 \Longrightarrow 2\vec{e}_i \cdot \frac{d\vec{e}_i}{dt} = 0. \tag{4.5}$$

Derivacija svakog pojedinog jediničnog vektora ima samo komponente preostalih jediničnih vektora

$$\dot{\vec{e}}_1 = \alpha_1 \vec{e}_2 + \alpha_2 \vec{e}_3, \tag{4.6}$$

$$\dot{\vec{e}}_2 = \alpha_3 \vec{e}_3 + \alpha_4 \vec{e}_1, \tag{4.7}$$

$$\dot{\vec{e}}_3 = \alpha_3 \vec{e}_1 + \alpha_6 \vec{e}_2. \tag{4.8}$$

Iz uvjeta ortogonalnosti jediničnih vekotra močzemo zaključiti da koeficijenti α_i nisu svi nezavisni

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \Longrightarrow \dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \cdot \dot{\vec{e}}_2 = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = -\alpha_4, \tag{4.9}$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 \Longrightarrow \dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_1 \cdot \dot{\vec{e}}_3 = 0 \Longrightarrow \alpha_2 = -\alpha_5, \tag{4.10}$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 \Longrightarrow \dot{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \cdot \dot{\vec{e}}_3 = 0 \Longrightarrow \alpha_3 = -\alpha_6. \tag{4.11}$$

Iz zadnje tri relacije slijedi

$$\sum_i A_i \frac{d\vec{e}_i}{dt} = (-\alpha_1 A_2 - \alpha_2 A_3)\vec{e}_1 + (\alpha_1 A_1 - \alpha_3 A_3)\vec{e}_2 + (\alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_2)\vec{e}_3. \tag{4.12}$$

Upotrijebimo li definiciju determinante

$$\sum_i A_i \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}. \tag{4.13}$$

Definiramo vektor $\vec{\omega}$ s komponentama $\alpha_3 \equiv \omega_1$, $\alpha_2 \equiv -\omega_2$ i $\alpha_1 \equiv \omega_3$

$$\sum_i A_i \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}. \tag{4.14}$$

Konačno, ako opažač u sustavu krutog tijela vidi promjenu vektora $\frac{d'\vec{A}}{dt}$, promjena istog vektora za opažača u vanjskom sustavu iznosi

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}. \tag{4.15}$$

4.2 Eulerove jednadžbe

Koordinatni sustav vezan uz zvrk biramo tako da vrijedi

1. ishodište sustava je u centru mase zvrka,
2. osi sustava se podudaraju s glavnim osima zvrka.

Polazimo od jednadžbi gibanja zvrka u odnosu na vanjski sustav

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d'\vec{P}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{P} = \vec{F}, \tag{4.16}$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d'\vec{M}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{M} = \vec{N}, \tag{4.17}$$

pri čemu je $\vec{P} = \mu\vec{V}$ količina gibanja, a $\vec{M} = I\vec{\Omega}$ moment količina gibanja zvrka. Koristit ćemo oznake $x \equiv 1$, $y \equiv 2$ i $z \equiv 3$. Raspišemo li jedn. (4.16) po komponentama, doći ćemo do sustava od tri vezane diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d'V_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2 = \frac{F_1}{\mu}, \tag{4.18}$$

$$\frac{d'V_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3 = \frac{F_2}{\mu}, \tag{4.19}$$

$$\frac{d'V_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1 = \frac{F_3}{\mu}. \tag{4.20}$$

Jedn. (4.17) predstavlja nešto složeniji problem. Iskoristimo odabir sustava vezanog uz zvrk prema kojem se osi sustava xyz podudaraju s glavnim osima zvrka

$$\vec{M} = M_1\vec{i} + M_2\vec{j} + M_3\vec{k} = I_1\Omega_1\vec{i} + I_2\Omega_2\vec{j} + I_3\Omega_3\vec{k}. \tag{4.21}$$

Raspisana po komponentama, jedn. (4.17) glasi

$$I_1\frac{d'\Omega_1}{dt} + \Omega_2\Omega_3(I_3 - I_2) = N_1, \tag{4.22}$$

$$I_2\frac{d'\Omega_2}{dt} + \Omega_1\Omega_3(I_1 - I_3) = N_2, \tag{4.23}$$

$$I_3\frac{d'\Omega_3}{dt} + \Omega_1\Omega_2(I_2 - I_1) = N_3. \tag{4.24}$$

Dva skupa jednadžbi (4.18-4.20) i (4.22-4.24) zovemo Eulerove jednadžbe. Jednadžbe (4.18-4.20) opisuju gibanje točke vanjskog sustava u odnosu na zvrk, dok jedn. (4.22-4.24) opisuju vrtnju okoline u odnosu na zvrk. U daljnjim razmatranjima ćemo izostavljati oznaku ’ na derivaciji u pomičnom sustavu.

4.3 Primjer: slobodni simetrični zvrk

Da bi opisali gibanje u sustavu vezanom uz zvrk, moramo riješiti Eulerove jednadžbe. Iskoristimo činjenicu da je zvrk simetričan ($I_1 = I_2 \equiv I$), kao i da na njega ne djeluju vanjske sile. Uz takve pretpostavke, Eulerove jednadžbe znatno se pojednostavljuju

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_1)\Omega_2\Omega_3 = 0, \tag{4.25}$$

$$I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = 0, \tag{4.26}$$

$$I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} = 0. \tag{4.27}$$

Rješenje jedn. (4.27) odgovara konstanti

$$\Omega_3 = \Omega_{30} = \text{konst}, \tag{4.28}$$

odnosno kutna brzina rotacije zvrka oko glavne osi z (ujedno i os simetrije zvrka) je stalna. Jednom kada fiksiramo konstantu Ω_{30}, možemo definirati još jednu konstantu

$$\omega \equiv \Omega_{30} \frac{I_3 - I_1}{I_1}. \tag{4.29}$$

Preostale dvije Eulerove jednadžbe poprimaju sljedeći oblik

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega\Omega_2, \tag{4.30}$$

$$\dot{\Omega}_2 = \omega\Omega_1. \tag{4.31}$$

Deriviramo jedn. (4.30) po vremenu, zatim uvrstimo $\dot{\Omega}_2$ iz jedn. (4.31) i problem se konačno svodi na jednadžbu harmoničkog oscilatora

$$\ddot{\Omega}_1 + \omega^2\Omega_1 = 0. \tag{4.32}$$

Uz prikladan izbor početne faze, rješenje glasi

$$\Omega_1 = \Omega_0 \cos\omega t, \tag{4.33}$$

$$\Omega_2 = \Omega_0 \sin\omega t. \tag{4.34}$$

Zaključno, komponenta kutne brzine Ω_{30} je konstantna, dok preostale dvije komponente osciliraju. Njihov vektorski zbroj rotira u ravnini određenoj osima x i y

$$\vec{\Omega}_0 = \Omega_1\vec{i} + \Omega_2\vec{j} = \Omega_0 \left[\cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j}\right], \tag{4.35}$$

tako da veličina $\Omega_0 = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$ ostaje stalna. Kutna brzina rotacije vektora $\vec{\Omega}_0$ iznosi

$$\omega = \Omega_3 \frac{I_3 - I}{I}. \tag{4.36}$$

Rezultat je u skladu s prethodnim razmatranjima o gibanju zvrka u odnosu na vanjski sustav. Nepomični opažač vidi vektor kutne brzine kako rotira oko konstantnog vektora momenta količine gibanja, dok za opžača vezanog uz zvrk vektor momenta količine gibanja rotira oko nepomične osi simetrije zvrka.

4.4 Primjer: slobodni asimetrični zvrk

Promatramo slobodni asimetrični zvrk za koji vrijedi

$$I_3 > I_2 > I_1. \tag{4.37}$$

Pratimo gibanje zvrka iz koordinatnog sustava koji miruje sa zvrkom, a osi mu se podudaraju s glavnim osim zvrka. Izvedimo prvo zakone sačuvanja, polazeći od jednadžbe

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d'\vec{M}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{M} = \vec{N} = 0. \tag{4.38}$$

Zvrk je slobodan pa je u vanjskom (inercijalnom) sustavu moment količine gibanja sačuvan po iznosu i po smjeru. Gledajući iz sustava zvrka, sačuvan je samo iznos momenta količine gibanja. Pomnožimo li jedn. (4.38) skalarno s vektorom momenta količine gibanja

$$\vec{M} \cdot \frac{d'\vec{M}}{dt} + \vec{M} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{M}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{d'\vec{M}^2}{dt} = 0 \tag{4.39}$$

Dakle, ako s M_1, M_2 i M_3 označimo komponente momenta količine gibanja u sustavu glavnih osi zvrka, vrijedi sljedeća relacija

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 \equiv \vec{M}^2 = \text{konst.} \tag{4.40}$$

Druga sačuvana veličina je energija. Pomnožimo li relaciju (4.38) skalarno s $\vec{\Omega}$

$$\vec{\Omega} \cdot \frac{d'\vec{M}}{dt} = \Omega_1 \frac{d'M_1}{dt} + \Omega_2 \frac{d'M_2}{dt} + \Omega_3 \frac{d'M_3}{dt} = 0, \tag{4.41}$$

a zatim uzmemo u obzir da vrijedi $M_i = I_i \Omega_i$ dolazimo do zaključka

$$\frac{d'}{dt}\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right) = 0. \tag{4.42}$$

Veličina u zagradi je konstanta gibanja

$$\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} \equiv 2E = \text{konst.} \tag{4.43}$$

Dozvoljene vrijednosti komponenti momenta količine gibanja M_1, M_2 i M_3 određene su sjecištima sfere

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2, \tag{4.44}$$

i elipsoida

$$\frac{M_1^2}{2I_1E} + \frac{M_2^2}{2I_2E} + \frac{M_3^2}{2I_3E} = 1. \tag{4.45}$$

Da bi presjecište postojalo mora vrijediti

$$2EI_1 \leq M^2 \leq 2EI_3, \tag{4.46}$$

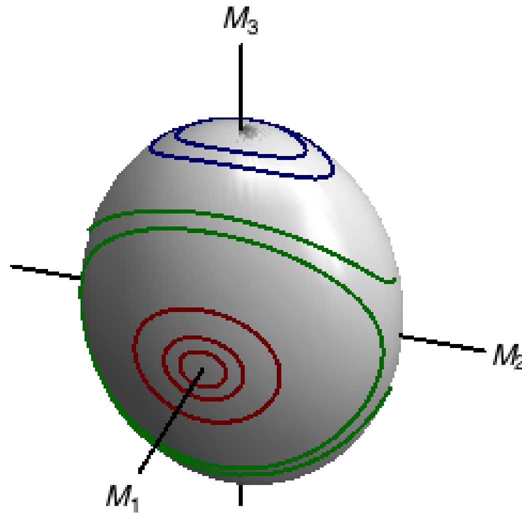
odnosno polumjer sfere mora biti manji od najduže i veći od najmanje poluosi elipsoida. Fiksiramo li energiju zvrka, odnosno oblik elipsoida, smanjujući M^2 od $2EI_3$ do $2EI_1$ presjecišta se mijenjaju kao na sl. 4.1. Najjednostavnija rješenja predstavljaju jednolike vrtnje oko glavnih osi zvrka

$$\Omega_{10} \neq 0, \quad \Omega_{20} = \Omega_{30} = 0, \tag{4.47}$$

$$\Omega_{20} \neq 0, \quad \Omega_{30} = \Omega_{10} = 0, \tag{4.48}$$

$$\Omega_{30} \neq 0, \quad \Omega_{10} = \Omega_{20} = 0. \tag{4.49}$$

Rješenja (4.47-4.49) odgovaraju točkama u kojima elipsoid probada osi M_1, M_2 i M_3, pri čemu točka (4.48) pripada dvjema krivuljama koje se protežu preko cijelog elipsoida. Tri rješenja razlikuju se po stabilnosti, kao što vidimo na sl. 4.1. Smanjimo li M^2 ispod $2EI_3$ za neki mali iznos, točka prelazi u malu elipsu. Zvrk se vrti oko osi 3 uz malu precesiju. Slično, ako M^2 povećamo malo iznad $2EI_1$, putanja iz točke opet prelazi u elipsu. U ovom slučaju zvrk se vrti oko osi 1 uz malu precesiju. Suprotno, ako M_2 malo pomaknemo od vrijednosti $2EI_2$, nećemo dobiti malu precesiju. Vektor momenta količine gibanja zvrka se potpuno udaljava od osi M_2. To znači da su rješenja (4.47) i (4.49) stabilna, dok je rješenje (4.48) nestabilno. Do istih zaključaka možemo doći pomoću Eulerovih jednadžbi.



Slika 4.1: Presjecišta sfere (4.44) i elipsoida (4.45). Crvenom i plavom bojom označena su stabilna, a zelenom nestabilna rješenja.

4.4.1 Analiza Eulerovih jednadžbi za slobodni asimetrični zvrk

Eulerove jednadžbe za asimetričan slobodni zvrk glase

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = 0, \tag{4.50}$$

$$I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = 0, \tag{4.51}$$

$$I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = 0. \tag{4.52}$$

Pomnožimo prvu jednadžbu s $I_1\Omega_1$, drugu s $I_2\Omega_2$, a treću s $I_3\Omega_3$, a zatim ih zbrojimo dolazimo do sačuvanja iznosa momenta količine gibanja (4.40). Jednako, ako pomnožimo prvu jednadžbu s Ω_1, drugu s Ω_2, a treću s Ω_3, a zatim ih zbrojimo dolazimo do sačuvanja energije (4.43).

Najjednostavnije rješenje sustava (4.50)-(4.51) je ono za koje je vektor kutne brzine konstantan

$$\Omega_1 = \Omega_{10}, \quad \Omega_2 = \Omega_{20}, \quad \Omega_3 = \Omega_{30}. \tag{4.53}$$

Uvrštavanjem rješenja u Eulerove jednadžbe slijedi

$$\Omega_{10}\Omega_{20} = 0, \quad \Omega_{20}\Omega_{30} = 0, \quad \Omega_{30}\Omega_{10} = 0, \tag{4.54}$$

jer su sva tri momenta tromosti različita. Sustav jednadžbi (4.54) ima tri moguća tipa rješenja (4.47-4.49), od kojih svako predstavlja jednoliku vrtnju oko glavnih osi zvrka.

Linearizacija Eulerovih jednadžbi

Pretpostavimo da je rješenje Eulerovih jednadžbi blisko rješenju (4.47)

$$\Omega_1(t) = \Omega_{10} + \omega_1(t), \quad \Omega_2(t) = \omega_2(t), \quad \Omega_3(t) = \omega_3(t). \tag{4.55}$$

Zadržimo li samo članove linearne u malim veličinama ω_1, ω_2 i ω_3

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = 0, \tag{4.56}$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = -(I_1 - I_3)\Omega_{10}\omega_3, \tag{4.57}$$

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = -(I_2 - I_1)\Omega_{10}\omega_2. \tag{4.58}$$

Rješenje jedn. (4.56) je konstanta $\omega_1 = \mathrm{konst.}$, odnosno kutna brzina se promijeni za mali iznos, dok smjer ostaje konstantan. Pretpostavimo li da jedn. (4.57) i (4.58) imaju oscilatorna rješenja

$$\omega_2(t) = \omega_{20} e^{i\alpha t} \quad \text{i} \quad \omega_3(t) = \omega_{30} e^{i\alpha t}, \tag{4.59}$$

dolazimo do relacija

$$iI_2\alpha\omega_{20}e^{i\alpha t} = -(I_1 - I_3)\Omega_{10}\omega_{30}e^{i\alpha t}, \tag{4.60}$$

$$iI_3\alpha\omega_{30}e^{i\alpha t} = -(I_2 - I_1)\Omega_{10}\omega_{20}e^{i\alpha t}. \tag{4.61}$$

Pomnožimo prethodne dvije jednadžbe i preostaje nam

$$I_2 I_3 \alpha^2 = (I_3 - I_2)(I_2 - I_1)\Omega_{10}^2. \tag{4.62}$$

Desna strana je pozitivna, pa je α realan, tj. rješenja su oscilacije koje odgovaraju maloj elipsi oko osi M_1. Ako bi linearizirali Eulerove jednadžbe oko nestabilnog rješenja

$$\Omega_1(t) = \omega_1(t), \quad \Omega_2(t) = \Omega_{20} + \omega_2(t), \quad \Omega_3(t) = \omega_3(t), \tag{4.63}$$

došli bi do zaključka (dovoljno je ciklički zamijeniti indekse 1, 2 i 3)

$$I_3 I_1 \alpha^2 = (I_3 - I_2)(I_1 - I_2)\Omega_{20}^2. \tag{4.64}$$

Desna strana je sada negativna ($I_1 < I_2$) pa je α imaginaran. Rješenja u ovom slučaju nisu oscilatorna, nego eksponencijalna. To ujedno znači da ovaj tip rješenja nije stabilan, nego nestabilan.

Numeričko rješenje Eulerovih jednadžbi

Kao konkretni primjer, promatramo asimetrični zvrk u obliku elipsoida s osima a, b i c. Odgovarajući momenti inercije glase

$$I_x = \frac{1}{5}m(b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{1}{5}m(a^2 + c^2), \quad I_z = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2). \tag{4.65}$$

Sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = 0, \tag{4.66}$$

$$I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = 0, \tag{4.67}$$

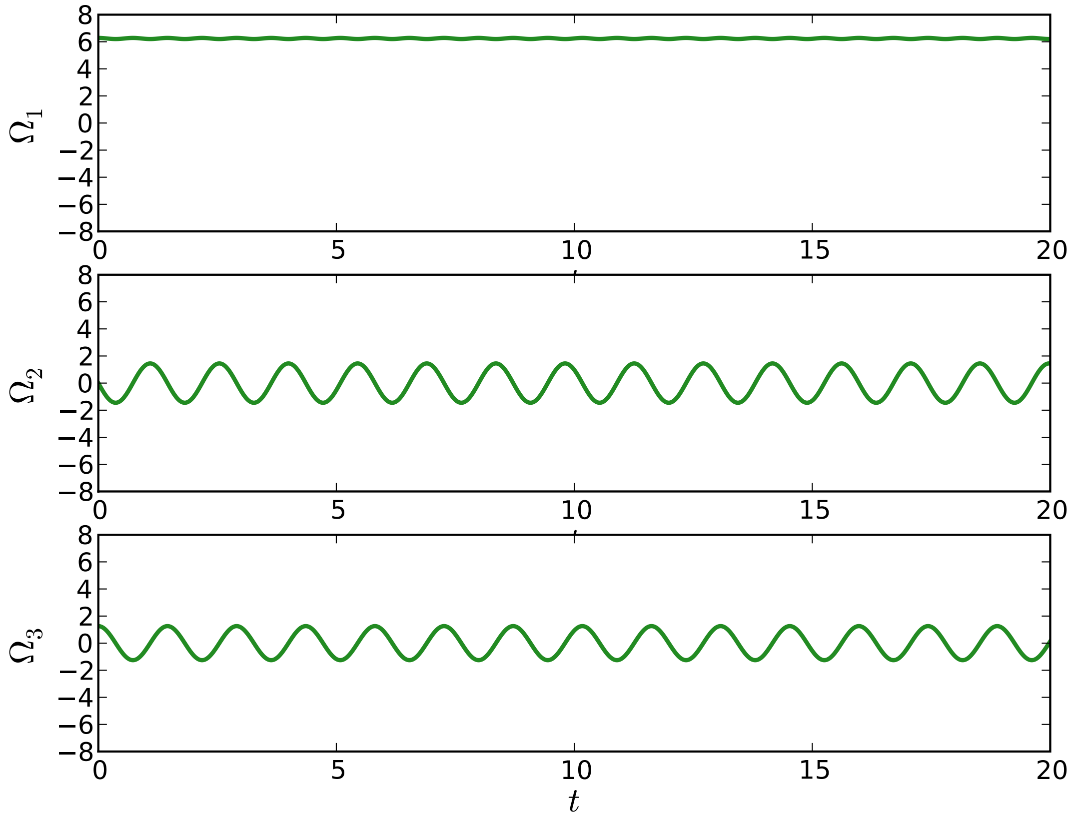
$$I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = 0, \tag{4.68}$$

možemo riješiti pomoću rutine *odeint* iz paketa SciPy. Izgled rješenja bitno ovisi o početnim uvjetima. Ograničimo se na tri primjera iz prošlog odjeljka:

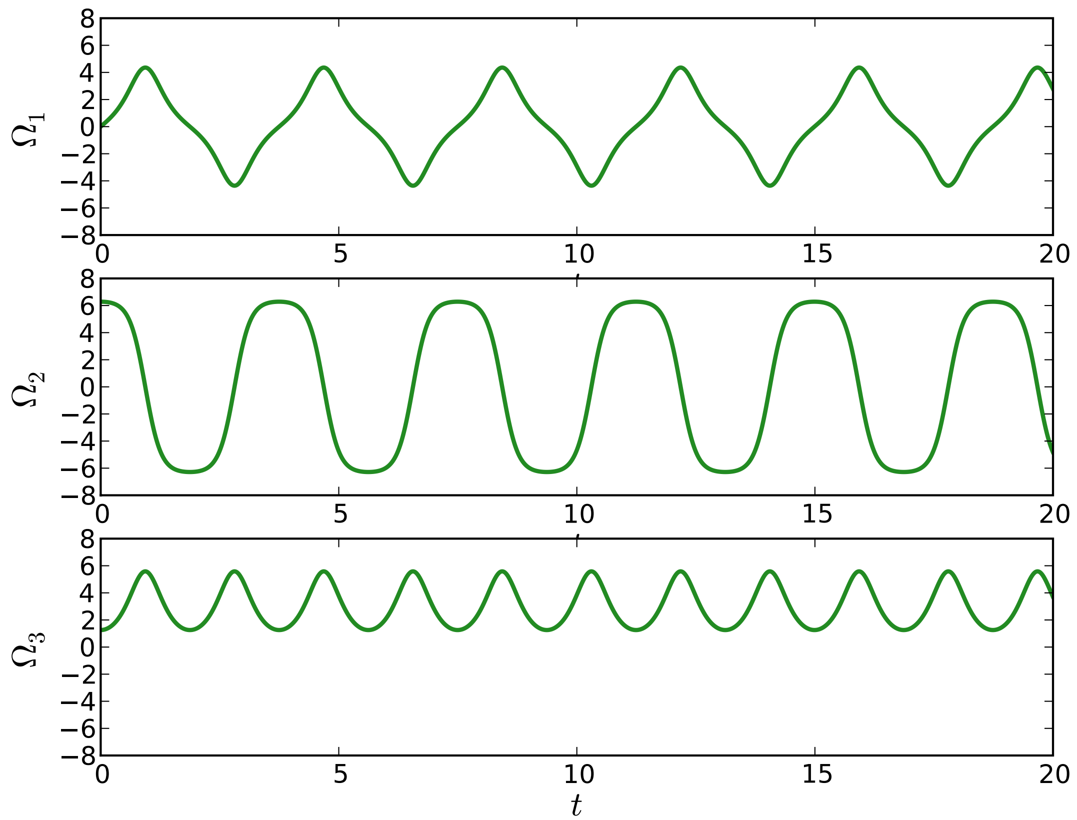
1. Vrtnja oko najkraće osi elipsoida: $\Omega_{10} = \Omega_0$, $\Omega_{20} = 0$ i $\Omega_{30} = \epsilon\Omega_0$. U početnom trenutku kutna brzina ima veliku komponentu Ω_{10}, mnogo manju Ω_{30}, dok komponenta Ω_{20} iščezava.

2. Vrtnja oko srednje osi elipsoida: $\Omega_{10} = 0$, $\Omega_{20} = \Omega_0$ i $\Omega_{30} = \epsilon\Omega_0$. U početnom trenutku kutna brzina ima veliku komponentu Ω_{20}, mnogo manju Ω_{30}, dok komponenta Ω_{10} iščezava.

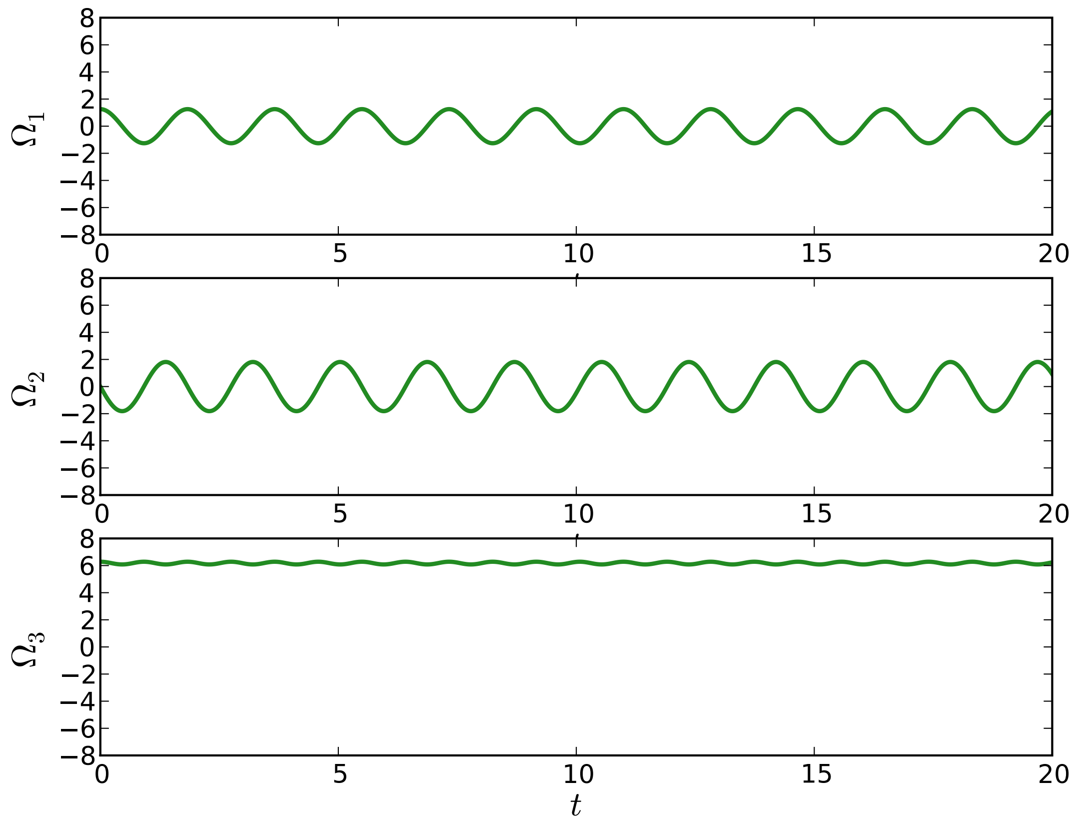
3. Vrtnja oko najduže osi elipsoida: $\Omega_{10} = \epsilon\Omega_0$, $\Omega_{20} = 0$ i $\Omega_{30} = \Omega_0$. U početnom trenutku kutna brzina ima veliku komponentu Ω_{30}, mnogo manju Ω_{10}, dok komponenta Ω_{20} iščezava.



Slika 4.2: Numeričko rješenje Eulerovih jednadžbi za asimetrični elipsoid. Početni uvjeti su: $\Omega_{10} = 2\pi\ s^{-1}$, $\Omega_{20} = 0$, $\Omega_{30} = 0.2\Omega_{10}$. Numeričko rješenje odgovara analitičkom rješenju do kojeg smo došli linearizacijom Eulerovih jednadžbi. Početni uvjeti su bliski vrtnji oko najkraće osi pa je rješenje stabilno. Komponenta Ω_1 je praktički konstantna i jednaka početnoj vrijednosti, dok komponetne Ω_2 i Ω_3 osciliraju oko nule.



Slika 4.3: Numeričko rješenje Eulerovih jednadžbi za asimetrični elipsoid. Početni uvjeti su: $\Omega_{10} = 0$, $\Omega_{20} = 2\pi\ s^{-1}$, $\Omega_{30} = 0.2\Omega_{20}$. Numeričko rješenje odgovara analitičkom rješenju do kojeg smo došli linearizacijom Eulerovih jednadžbi. Početni uvjeti su bliski vrtnji oko srednje osi pa je rješenje nestabilno.



Slika 4.4: Numeričko rješenje Eulerovih jednadžbi za asimetrični elipsoid. Početni uvjeti su: $\Omega_{10} = 0.2\Omega_{30}$, $\Omega_{20} = 0$, $\Omega_{30} = 2\pi\ s^{-1}$. Numeričko rješenje odgovara analitičkom rješenju do kojeg smo došli linearizacijom Eulerovih jednadžbi. Početni uvjeti su bliski vrtnji oko najduže osi pa je rješenje stabilno. Komponenta Ω_3 je praktički konstantna i jednaka početnoj vrijednosti, dok komponetne Ω_1 i Ω_2 osciliraju oko nule.

Analitičko rješenje Eulerovih jednadžbi

Polazeći od konstanti gibanja E i M^2, Eulerove jednadžbe za asimetrični slobodni zvrk možemo riješiti i analitički[1]. Iz jednažbi

$$I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 = 2E, \tag{4.69}$$

$$I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 = M^2, \tag{4.70}$$

(4.71)

možemo izraziti komponente Ω_1 i Ω_3 pomoću Ω_2

$$\Omega_1^2 = \frac{2EI_3 - M^2 - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2}{I_1(I_3 - I_1)}, \tag{4.72}$$

$$\Omega_2^3 = \frac{M^2 - 2EI_1 - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2}{I_3(I_3 - I_1)}. \tag{4.73}$$

Uvrštavanjem u drugu Eulerovu jednadžbu, dolazimo do obične diferencijalne jednadžbe prvog reda za komponentu Ω_2

$$\dot{\Omega}_2 = \frac{I_3 - I_2}{I_2}\sqrt{\frac{2EI_3 - M^2 - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2}{I_1(I_3 - I_1)}}\sqrt{\frac{M^2 - 2EI_1 - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2}{I_3(I_3 - I_1)}}. \tag{4.74}$$

U daljnjem razmatranju promatramo slučaj $M^2 > 2EI_2$, a ukoliko bi bio ispunjen suprotan uvjet $M^2 < 2EI_2$, u svim izrazimo koji slijede trebalo bi zamijeniti I_1 i I_3. Uvodimo novu vremensku varijablu

$$\tau = t\sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}{I_1 I_2 I_3}}, \tag{4.75}$$

kao i varijablu s proporcionalnu s Ω_2

$$s = \Omega_2\sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{2EI_3 - M^2}}. \tag{4.76}$$

Jedn. 4.74 svodi se na jednostavniji izraz

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}, \tag{4.77}$$

pri čemu smo definirali konstanu $k^2 < 1$

$$k^2 = \frac{(I_2 - I_1)(2EI_3 - M^2)}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}. \tag{4.78}$$

[1] detalji se nalaze u udžbeniku Landau-Lifshitz, Mehanika.

Separiramo li jedn. (4.77), uz odabir početnog uvjeta $s(\tau = 0) = 0$ (odnosno $\Omega_2(t=0)=0$), dolazimo do rješenja

$$\int_0^s \frac{ds}{(1-s^2)(1-k^2s^2)} = \tau. \quad (4.79)$$

Rješenje odgovara specijalnoj funkciji pod nazivom *Jacobijeva eliptička funkcija*

$$s = \mathrm{sn}(\tau). \quad (4.80)$$

Definiramo li još dvije funkcije[2]

$$\mathrm{cn}(\tau) = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2(\tau)}, \quad \mathrm{dn}(\tau) = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(\tau)}, \quad (4.81)$$

rješenja za komponente kutne brzine u sustavu zvrka možemo napisati u zatvorenoj formi

$$\Omega_1(t) = \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_1(I_3-I_1)}}\mathrm{cn}(\tau), \quad (4.82)$$

$$\Omega_2(t) = \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_2(I_3-I_2)}}\mathrm{sn}(\tau), \quad (4.83)$$

$$\Omega_3(t) = \sqrt{\frac{M^2 - 2EI_1}{I_3(I_3-I_1)}}\mathrm{dn}(\tau). \quad (4.84)$$

Funkcije sn, cn i dn su periodičke u varijabli τ s periodom $4K$, pri čemu je K potpuno eliptički integral prve vrste

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^2)(1-k^2s^2)} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1-k^2\sin^2 u}. \quad (4.85)$$

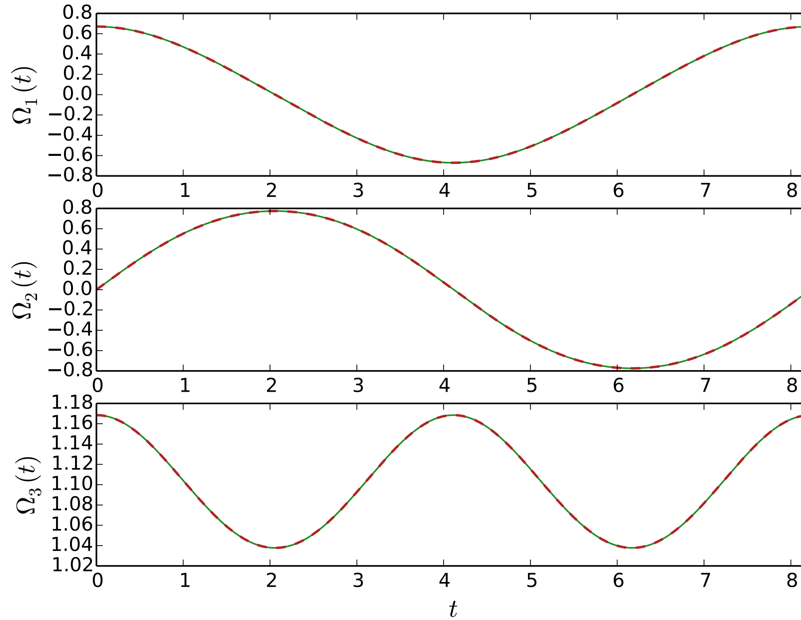
Vratimo li se na varijablu t, period možemo napisati u sljedećem obliku

$$T = 4K\sqrt{\frac{I_1I_2I_3}{(I_3-I2)(M^2-2EI_1)}}. \quad (4.86)$$

Nakon vremena T, vektor kutne brzine Ω vraća se u svoj početni položaj (u sustavu zvrka), no to ne znači da će se i sam zvrk vratiti u svoj početni položaj u fiksnom sustavu. Na sl. 4.5 nalazi se usporedba analitičkog i numeričkog rješenja Eulerovih jednadžbi za slobodni asimetrični zvrk koja potvrđuje ispravnost izvedenih formula.

---

[2]Sve tri navedene funkcije dostupne su u modulu it scipy pod nazivom *ellipj(u,m)* ($m \equiv k^2$). Funkcija vraća niz od tri vrijednosti, prva odgovara funkciji sn, druga cn, a treća dn.



Slika 4.5: Usporedba numeričkog (puna zelena linija) i analitičkog (isprekidana crvena linija) rješenja Eulerovih jednadžbi za slobodni asimetrični zvrk u intervalu $[0, T]$.

Posebno je zanimljiv slučaj $M^2 = 2EI_2$, kada vrijedi $k^2 = 1$. U tom slučaju integral u jedn. 4.85, odnosno period T, divergira. Međutim, diferencijalna jednadžba za varijablu s postaje vrlo jednostavna

$$\frac{ds}{d\tau} = 1 - s^2, \tag{4.87}$$

a rješenje možemo pročitati iz tablica

$$\Omega_2(t) = \Omega_0 \tanh \tau, \quad \Omega_0 = \frac{M}{I_2} = 2EM. \tag{4.88}$$

Preostale dvije komponente se također pojednostavljuju

$$\Omega_1(t) = \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}}\Omega_0\sqrt{1 - \Omega_2^2(t)} = \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}}\frac{\Omega_0}{\cosh \tau}, \tag{4.89}$$

$$\Omega_3(t) = \sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)}}\Omega_0\sqrt{1 - \Omega_2^2(t)} = \sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)}}\frac{\Omega_0}{\cosh \tau}. \tag{4.90}$$

Putanja za koju je ispunjeno $M^2 = 2EI_2$ na sl. 4.1 prolazi kroz presjecište elipsoida i osi 2, te razdvaja putanje koje potječu od male vrtnji oko osi I_1 i putanje koje potječu od male vrtnje oko osi I_3. Takav tip putanje zovemo *separatrisa* i njezina karakteristika je beskonačni period. Nekoliko primjera putanja nalazi se u odvojenim animacijama. Animacije s oznakama asimetricni-A-1.gif, asimetricni-A-2.gif, asimetricni-A-3.gif i asimetricni-A-4.gif odgovaraju slučajevima $M^2 > 2EI_2$, dok asimetricni-B-1.gif, asimetricni-B-2.gif i asimetricni-B-3.gif odgovaraju slučajevima $M^2 < 2EI_2$. Separatrisi su najbliže animacije asimetricni-A-4.gif i asimetricni-B-3.gif, a zbog porasta perioda linija više ne izgleda potpuno glatko.

Primjer 4.1

Simetrično kruto tijelo vrti se oko točke O koja se nalazi na osi simetrije. Na tijelo djeluje moment sile proporcionalan kutnoj brzini vrtnje $\vec{N} = -\lambda\vec{\Omega}$. Nađite ovisnost kuta između osi simetrije i kutne brzine o vremenu.

Eulerove jednadžbe za simetrični zvrk uz zadani moment sile glase

$$I\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I)\Omega_2\Omega_3 = N_1 = -\lambda\Omega_1, \tag{4.91}$$

$$I\dot{\Omega}_2 + (I - I_3)\Omega_3\Omega_1 = N_2 = -\lambda\Omega_2, \tag{4.92}$$

$$I_3\dot{\Omega}_3 = N_3 = -\lambda\Omega_3. \tag{4.93}$$

Iz zadnje jednadžbe slijedi

$$\Omega_3(t) = \Omega_3(0)e^{-\frac{\lambda}{I_3}t}. \tag{4.94}$$

Prvu jednadžbu pomnožimo s Ω_1, drugu s Ω_2

$$I\dot{\Omega}_1\Omega_1 + (I_3 - I)\Omega_2\Omega_3\Omega_1 = -\lambda\Omega_1^2, \tag{4.95}$$

$$I\dot{\Omega}_2\Omega_2 + (I - I_3)\Omega_3\Omega_1\Omega_2 = -\lambda\Omega_2^2, \tag{4.96}$$

a zatim ih zbrojimo

$$\frac{I}{2}\frac{d}{dt}\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right) = -\lambda\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right). \tag{4.97}$$

Definiramo li veličinu $\Omega_\perp^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2$,

$$\frac{I}{2}\frac{d\Omega_\perp^2}{dt} = -\lambda\Omega_\perp^2 \Longrightarrow \frac{d\Omega_\perp^2}{dt} = -\frac{2\lambda}{I}\Omega_\perp^2. \tag{4.98}$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe glasi

$$\Omega_\perp(t) = \Omega_\perp(0)e^{-\frac{\lambda}{I}t}. \tag{4.99}$$

Kut između osi simetrije i kutne brzine

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}{\Omega_3}. \tag{4.100}$$

Uvrstimo li izračunate komponente kutne brzine, dobit ćemo ovisnost kuta α o vremenu

$$\tan\alpha = \frac{\Omega_\perp}{\Omega_3} = \frac{\Omega_\perp(0)}{\Omega_3(0)}e^{-\left(\frac{1}{I}-\frac{1}{I_3}\right)\lambda t} = \tan\alpha(0)e^{-\left(\frac{1}{I}-\frac{1}{I_3}\right)\lambda t}. \tag{4.101}$$

Primjer 4.2

Simetrično kruto tijelo vrti se oko točke O koja se nalazi na osi simetrije. Na tijelo djeluje konstantni moment sile u smjeru osi z tijela. Riješite Eulerove jedndadžbe.

Eulerove jednadžbe za simetrični zvrk uz zadani moment sile glase

$$I\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I)\Omega_2\Omega_3 = N_1 = 0, \tag{4.102}$$

$$I\dot{\Omega}_2 + (I - I_3)\Omega_3\Omega_1 = N_2 = 0, \tag{4.103}$$

$$I_3\dot{\Omega}_3 = N_3 = N. \tag{4.104}$$

Zadnju jednadžbu možemo integrirati

$$\Omega_3(t) = \frac{N}{I_3}t + \Omega_0. \tag{4.105}$$

Uvrstimo $\Omega_3(t)$ u prve dvije Eulerove jednadžbe

$$\dot{\Omega}_1 + \frac{N(I_3 - I)}{I_3 I}\left(t + \frac{I_3}{N}\Omega_0\right)\Omega_2 = 0, \tag{4.106}$$

$$\dot{\Omega}_1 + \frac{N(I - I_3)}{I_3 I}\left(t + \frac{I_3}{N}\Omega_0\right)\Omega_1 = 0. \tag{4.107}$$

Uvedemo li supstituciju

$$\tau = \left(t + \frac{I_3}{N}\Omega_0\right)^2 \Longrightarrow \frac{d}{dt} = 2\left(t + \frac{I_3}{N}\Omega_0\right)\frac{d}{d\tau} = 2\sqrt{\tau}\frac{d}{d\tau}, \tag{4.108}$$

prve dvije Eulerove jednadžbe svode se na

$$\frac{d\Omega_1}{d\tau}2\sqrt{\tau} + \frac{N(I_3 - I)}{I_3 I}\sqrt{\tau}\Omega_2 = 0, \tag{4.109}$$

$$\frac{d\Omega_2}{d\tau}2\sqrt{\tau} + \frac{N(I - I3)}{I_3 I}\sqrt{\tau}\Omega_1 = 0. \tag{4.110}$$

Podijelimo jednadžbe s $2\sqrt{\tau}$

$$\frac{d\Omega_1}{d\tau} + \frac{N(I_3 - I)}{2I_3 I}\Omega_2 = 0, \tag{4.111}$$

$$\frac{d\Omega_2}{d\tau} + \frac{N(I - I_3)}{2I_3 I}\Omega_1 = 0. \tag{4.112}$$

Uvedemo li oznaku

$$\chi \equiv \frac{N(I_3 - I)}{2I_3 I}, \tag{4.113}$$

Eulerove jednadžbe svode se na

$$\frac{d\Omega_1}{d\tau} + \chi\Omega_2 = 0, \tag{4.114}$$

$$\frac{d\Omega_2}{d\tau} - \chi\Omega_1 = 0. \tag{4.115}$$

Prvu jednadžbu deriviramo po τ

$$\frac{d^2\Omega_1}{d\tau^2} + \chi\frac{d\Omega_2}{d\tau} = 0, \tag{4.116}$$

a zatim uvrstimo drugu jednadžbu da bi dobili jednažbu harmoničkog oscilatora

$$\frac{d^2\Omega_1}{d\tau^2} + \chi^2\Omega_1 = 0 \tag{4.117}$$

s poznatim rješenjem

$$\Omega_1 = A\cos(\chi\tau + \phi_0). \tag{4.118}$$

Konačno, rješenje Eulerovih jednadžbi

$$\Omega_1(t) = A\cos\left[\chi\left(t + \frac{I_3}{N}\Omega_0\right)^2 + \phi_0\right], \tag{4.119}$$

$$\Omega_2(t) = A\sin\left[\chi\left(t + \frac{I_3}{N}\Omega_0\right)^2 + \phi_0\right], \tag{4.120}$$

$$\Omega_3(t) = \frac{N}{I_3}t + \Omega_0. \tag{4.121}$$

Primjer 4.3

Nađite moment sile potreban da bi homogena pravokutna ploča mase M rotirala oko dijagonale konstantnom kutnom brzinom $\vec{\Omega}$.

Sustav vezan uz ploču označimo s $\vec{i} \equiv 1$, $\vec{j} \equiv 2$, $\vec{k} \equiv 3$. Osi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ rotiraju zajedno s pločom. Traženi moment sile računamo iz Eulerovih jednadžbi

$$I_1\dot{\Omega}_1 - (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 = N_1, \tag{4.122}$$

$$I_2\dot{\Omega}_2 - (I_3 - I_1)\Omega_3\Omega_1 = N_2, \tag{4.123}$$

$$I_3\dot{\Omega}_3 - (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 = N_3. \tag{4.124}$$

Momenti inercije pravokutne ploče glase

$$I_1 = \frac{1}{12}Ma^2 \quad I_2 = \frac{1}{12}Mb^2 \quad I_3 = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2). \tag{4.125}$$

Sa slike pročitamo komponente kutne brzine

$$\Omega_1 = -\Omega\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{4.126}$$

$$\Omega_2 = -\Omega\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{4.127}$$

$$\Omega_3 = 0. \tag{4.128}$$

Vektor $\vec{\Omega}$ je konstantan pa derivacije u Eulerovim jednadžbama iščezavaju. Jedini doprinos momentu sile koji ne iščezava je N_3

$$N_3 = -(I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 = \frac{M}{12}(b^2 - a^2)\frac{\Omega^2 ab}{a^2 + b^2}. \tag{4.129}$$

Moment sile potreban za ovakvo gibanje ploče

$$\vec{N} = \frac{Mab\Omega^2}{12}\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}\vec{k}. \tag{4.130}$$

Moment sile je konstantan u sustavu vezanom uz ploču, dok u vanjskom sustavu vektor $\vec{N}$ rotira zajedno s pločom.

Klasična mehanika 2

Prvi dio

Gibanje u neinercijalnim sustavima.

March 4, 2014

Sadržaj

1 Neinercijalni sustavi

1.1 Brzina i akceleracija u neinercijalnim sustavima

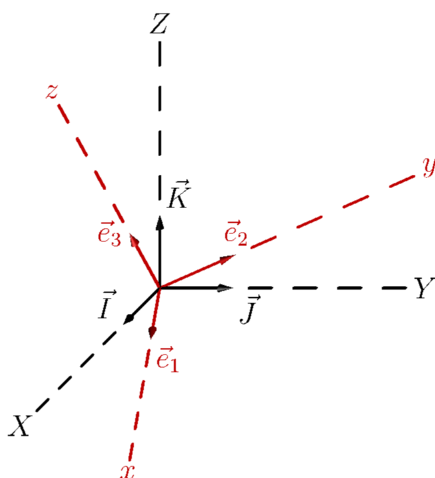
1.1.1 Operator deriviranja u pomičnom sustavu

Pretpostavimo da je koordinatni sustav XYZ fiksiran, dok sustav xyz rotira u odnosu na njega. Pritom oba sustava imaju zajedničko ishodište. Označimo s

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F \quad \text{i} \quad \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M \tag{1.1}$$

derivacije vektora $\vec{A}$ za opažača u fiksnom i pomičnom sustavu. Želimo povezati te dvije veličine. Neka su $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$ jedinični vektori, a A_1, A_2 i A_3 komponente vektora $\vec{A}$ u pomičnom sustavu. Za opažača u fiksnom sustavu mijenjaju se i komponente i jedinični vektori pomičnog sustava pa vrijedi

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = \sum_i \frac{dA_i}{dt}\vec{e}_i + \sum_i A_i \frac{d\vec{e}_i}{dt}, \tag{1.2}$$



Slika 1.1: Inercijalni sustav XYZ i sustav xyz koji rotira u odnosu na njega. Oba sustava imaju zajedničko ishodište.

dok se za opažača u pomičnom sustavu mijenjaju samo komponente vektora

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M = \sum_i \frac{dA_i}{dt}\vec{e}_i. \quad (1.3)$$

Uvrstimo jedn. (1.3) u jedn. (1.2)

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M + \sum_i A_i \frac{d\vec{e}_i}{dt}. \quad (1.4)$$

Bitno je uočiti da i za opažača nepomičnom sustavu jedinični vektori $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$ čine ortonormirani sustav

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}. \quad (1.5)$$

Iz uvjeta $\vec{e}_i^2 = 1$ slijedi

$$\frac{d}{dt}\vec{e}_i^2 = 0 \Longrightarrow 2\vec{e}_i \cdot \frac{d\vec{e}_i}{dt} = 0. \quad (1.6)$$

Vremenska derivacija jediničnog vektora je okomita na sam vektor

$$\dot{\vec{e}}_1 = \alpha_1\vec{e}_2 + \alpha_2\vec{e}_3, \quad (1.7)$$

$$\dot{\vec{e}}_2 = \alpha_3\vec{e}_3 + \alpha_4\vec{e}_1, \quad (1.8)$$

$$\dot{\vec{e}}_3 = \alpha_5\vec{e}_1 + \alpha_6\vec{e}_2. \quad (1.9)$$

Koeficijenti α_i nisu nezavisni. Veza među njima slijedi iz uvjeta ortogonalnosti

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \Longrightarrow \dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \cdot \dot{\vec{e}}_2 = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = -\alpha_4, \quad (1.10)$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 \Longrightarrow \dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_1 \cdot \dot{\vec{e}}_3 = 0 \Longrightarrow \alpha_2 = -\alpha_5, \quad (1.11)$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 \Longrightarrow \dot{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \cdot \dot{\vec{e}}_3 = 0 \Longrightarrow \alpha_3 = -\alpha_6. \quad (1.12)$$

Iz zadnje tri relacije slijedi jednadžba

$$\sum_i A_i \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \left(-\alpha_1 A_2 - \alpha_2 A_3\right)\vec{e}_1 + \left(\alpha_1 A_1 - \alpha_3 A_3\right)\vec{e}_2 + \left(\alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_2\right)\vec{e}_3, \quad (1.13)$$

koju možemo napisati pomoću determinante

$$\sum_i A_i \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}. \quad (1.14)$$

Ako napravimo sljedeću identifikaciju

$$\alpha_3 \equiv \omega_1\ , \quad -\alpha_2 \equiv \omega_2\ , \quad \alpha_1 = \omega_3, \quad (1.15)$$

jedn. (1.14) možemo napisati kao vektorski produkt

$$\sum_i A_i \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}. \tag{1.16}$$

Došli smo do veze derivacije u fiksnom i pomičnom sustavu

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M + \vec{\omega} \times \vec{A}. \tag{1.17}$$

Vektor $\vec{\omega}$ je kutna brzina kojom pomični sustav rotira u odnosu na fiksni. Ukoliko s D_F označimo operator deriviranja u fiksnom, a s D_M operator deriviranja u pomičnom sustavu, možemo napisati operatorsku jednadžbu

$$D_F = D_M + \vec{\omega}\times \tag{1.18}$$

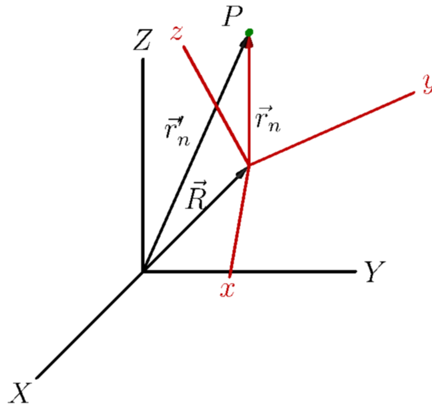
1.1.2 Brzina u neinercijalnom sustavu

Primjenimo općenitu formulu za derivaciju vektora (1.17) na vektor položaja

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_M + \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{1.19}$$

odakle slijedi izraz za brzinu u neinercijalnom sustavu

$$\vec{v}_F = \vec{v}_M + \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{1.20}$$



Slika 1.2: Inercijalni sustav XYZ i sustav xyz koji rotira u odnosu na njega. Sustavi nemaju zajedničko ishodište.

U općenitom slučaju fiksni i pomični koordinatni sustav nemaju zajedničko ishodište. Ako je $\vec{R}$ vektor položaja ishodišta pomičnog sustava, veza između vektora položaja točke P u dva sustava dana je s

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R}. \tag{1.21}$$

Brzina u nepomičnom sustavu

$$\vec{v}_F = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_F + \vec{v}_M + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{V} + \vec{v}_M + \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{1.22}$$

1.1.3 Ubrzanje u neinercijalnom sustavu

Akceleraciju u fiksnom sustavu računamo dvostrukom primjenom operatora deriviranja

$$\left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_F = \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\times\right)\left(\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_M + \vec{\omega} \times \vec{r}\right) \tag{1.23}$$

$$= \left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_M + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_M + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_M \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{1.24}$$

U općenitom slučaju fiksni i pomični sustav nemaju zajedničko ishodište, što uvodi dodatni translatorni član u akceleraciju

$$\vec{a}_F = \left.\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right|_F + \left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_M + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_M + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_M \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{1.25}$$

Pritom treći član zovemo Coriolisova

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_M, \tag{1.26}$$

a zadnji centripetalna akceleracija

$$\vec{a}_{cp} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{1.27}$$

1.1.4 Jednadžba gibanja u neinercijalnom sustavu

Gledano iz nepomičnog sustava, jednadžba gibanja za česticu mase m na koju djeluje sila $\vec{F}$ glasi

$$m\vec{a}_F = \vec{F}. \tag{1.28}$$

Uvrstimo izraz za akceleraciju u nepomičnom sustavu (1.25)

$$\left.\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right|_F + \left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_M + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_M + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_M \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{\vec{F}}{m}, \tag{1.29}$$

možemo izvesti jednadžbu gibanja u pomičnom sustavu

$$m\left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_M = \vec{F} - m\left.\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right|_F - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_M - m\left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_M \times\vec{r} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}). \quad (1.30)$$

Označimo li vremenske derivacije u pomičnom sustavu s

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_M = \vec{v}_M \equiv \vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}, \quad \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_M = \vec{a}_M \equiv \vec{a} \equiv \dot{\vec{v}}, \quad \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_M \equiv \dot{\vec{\Omega}}, \quad (1.31)$$

jednadžba gibanja glasi

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} - m\frac{d\vec{V}}{dt} + m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega} + m\left(\vec{r}\times\dot{\vec{\Omega}}\right) + 2m\vec{v}\times\vec{\Omega}. \quad (1.32)$$

Osim vanjske sile, na česticu djeluju i efektivne sile kao posljedica neinercijalnog gibanja sustava. Drugi član je posljedica translatornog ubrzanja, dok su preostali posljedica vrtnje sustava.

1.2 Izvod jednadžbe gibanja varijacionim postupkom

Polazna točka je Lagrangian u fiksiranom sustavu O'

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}_F^2 - U(\vec{r}'). \quad (1.33)$$

Uvrstimo li relaciju (1.20), Lagrangian poprima sljedeći oblik

$$L = \frac{m}{2}\left(\vec{V} + \vec{v} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2 - U(\vec{r}'). \quad (1.34)$$

Kvadriramo izraz u zagradi

$$L = \frac{m}{2}\vec{V}^2 + m\vec{V}\cdot\left(\vec{v} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right) + \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2 + m\vec{v}\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{r})$$
$$+ \frac{m}{2}\vec{v}^2 - U(\vec{r} + \vec{R}). \quad (1.35)$$

$\vec{V}^2$ je funkcija vremena, ali ne i koordinata $\vec{r}$ i brzine $\vec{v}$ pa ju možemo izraziti kao derivaciju neke funkcije vremena

$$\vec{V}^2 = \frac{d}{dt}F(t). \quad (1.36)$$

Na isti način dolazimo do zaključka

$$\vec{V} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{v}\right) = \vec{V} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V} \cdot \vec{r}\right) - \vec{r} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}. \tag{1.37}$$

Lagrangian poprima sljedeći oblik

$$\begin{aligned} L = & \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}F + m\vec{V} \cdot \vec{r}\right] \\ & + \frac{m}{2}\vec{v}^2 + \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right)^2 + m\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \cdot \vec{v} - m\vec{r} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} - U(\vec{r} + \vec{R}). \end{aligned} \tag{1.38}$$

Lagrangian je definiran do na vremensku derivaciju proizvoljne funkcije pa prvi član možemo izostaviti

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right)^2 + m\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \cdot \vec{v} - m\vec{r} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} - U(\vec{r} + \vec{R}). \tag{1.39}$$

Preostalo nam je varirati Lagrangian po $\vec{r}$ i $\vec{v}$

$$dL = m\vec{v}d\vec{v} + m\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \cdot \left(\vec{\Omega} \times d\vec{r}\right) + md\vec{v} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \tag{1.40}$$

$$+ m\vec{v} \cdot \left(\vec{\Omega} \times d\vec{r}\right) - md\vec{r} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}d\vec{r}. \tag{1.41}$$

Preuredimo vektorske produkte u drugom i četvrtom članu na desnoj strani

$$\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \cdot \left(\vec{\Omega} \times d\vec{r}\right) = \left[\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \times \vec{\Omega}\right] \cdot d\vec{r}, \tag{1.42}$$

$$m\vec{v} \times \left(\vec{\Omega} \times d\vec{r}\right) = md\vec{r} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{\Omega}\right). \tag{1.43}$$

Varijacija Lagrangiana svela se na

$$dL = m\vec{v}d\vec{v} + m\left[\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \times \vec{\Omega}\right] \cdot d\vec{r} + md\vec{v} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \tag{1.44}$$

$$+ md\vec{r} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{\Omega}\right) - md\vec{r} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}d\vec{r}. \tag{1.45}$$

Izračunamo derivacije potrebne za Euler-Lagrange jednadžbu

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right), \tag{1.46}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \times \vec{\Omega} + m\left(\vec{v} \times \vec{\Omega}\right) - m\frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}d\vec{r}, \tag{1.47}$$

tako da je Euler-Lagrange jednadžba dana s

$$m\dot{v}+m\left(\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}\right)+m\left(\vec{\Omega}\times\vec{v}\right)=m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega}+m\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right)-m\frac{d\vec{V}}{dt}-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}d\vec{r}, \quad (1.48)$$

odnosno uspjeli smo reproducirati jednadžbu gibanja (1.32)

$$m\dot{\vec{v}}=\vec{F}-m\frac{d\vec{V}}{dt}+m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega}+m\left(\vec{r}\times\dot{\vec{\Omega}}\right)+2m\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right). \quad (1.49)$$

1.3 Inercijalne sile

1.3.1 Čista translacija

Najjednostavniji primjer neinercijalnog sustava je onaj koji se giba translatorno bez vrtnje. Jednadžba gibanja svodi se na

$$m\dot{\vec{v}}=\vec{F}-m\frac{d\vec{V}}{dt}. \quad (1.50)$$

Uz vanjsku silu, na česticu u neinercijalnom sustavu djeluje i sila suprotnog smjera od ubrzanja sustava. Npr., u dizalu koje ubrzava prema gore (dolje) osjećamo veću (manju) silu od sile teže. Ako dizalo slobodno pada, ne osjećamo nikakvu silu (ekvivalentnost teške i trome mase).

1.3.2 Čista rotacija

Pretpostavimo da pomični sustav rotira tako da mu je ishodište fiksirano. Jednadžba gibanja svodi se na

$$m\dot{\vec{v}}=\vec{F}+m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\vec{\Omega}+m\left(\vec{r}\times\dot{\vec{\Omega}}\right)+2m\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right). \quad (1.51)$$

Prvi inercijalni član odgovara centrifugalnoj sili, drugi je prisutan samo ako se sustav nejednoliko vrti, dok je treći (Coriolisova sila) prisutan samo ako se čestica giba.

Centrifugalna sila

Vektor centrifugalne sile

$$\vec{F}_{cf}=m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega}=m\vec{\Omega}\times\left(\vec{r}\times\vec{\Omega}\right), \quad (1.52)$$

usmjeren je okomito na os rotacije, a nalazi se u ravnini određenoj s vektorima $\vec{r}$ i $\vec{\Omega}$. Centrifugalna sila iznosi

$$|\vec{F}_{cf}| = mr\Omega^2 \sin\theta = m\rho\Omega^2, \tag{1.53}$$

pri čemu je ρ udaljenost točke od osi rotacije. Centrifugalna sila na površini Zemlje, uzrokovana rotacijom Zemlje oko svoje osi, najjača je na ekvatoru

$$mR_z\Omega^2 = m\frac{6.37 \cdot 10^6 (2\pi)^2}{(24 \cdot 60 \cdot 60)^2} = m \cdot (0.03ms^{-2}). \tag{1.54}$$

Korekcija iznosi približno 0.3% sile teže. Idući prema polovima, rezultat bi trebali pomnožiti s faktorom $\sin\theta$.

Sila zbog kutnog ubrzanja

Ukoliko se smjer osi vrtnje ne mijenja, a kutna brzina se mijenja, na česticu djeluje tangencijalna sila

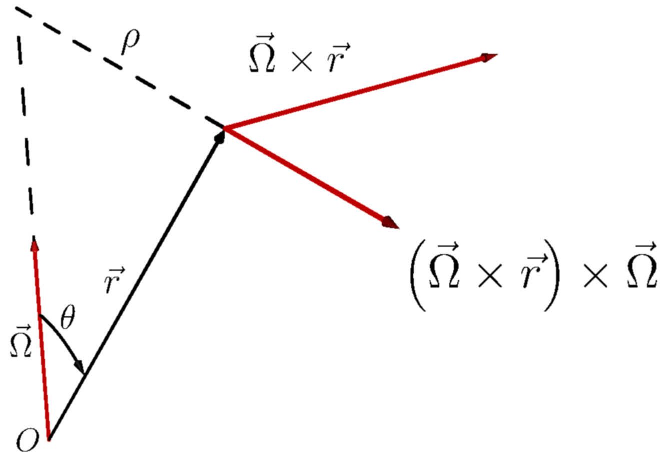
$$\vec{F} = m\dot{\Omega}\left(\vec{r} \times \vec{\Omega}_0\right), \tag{1.55}$$

okomita na ravninu određenu s osi vrtnje $\vec{\Omega}_0$ i vektorom $\vec{r}$. Najjednostavniji primjer je vrtuljak koji ubrzava ili usporava vrtnju.

Coriolisova sila

Coriolisova sila

$$\vec{F}_{cor} = 2m\left(\vec{v} \times \vec{\Omega}\right), \tag{1.56}$$



Slika 1.3: Vektor centrifugalne sile.

javlja se samo ukoliko se čestica giba u sustavu koji rotira. Promotrimo utjecaj Coriolisove sile na česticu koja slobodno pada. Efekte centrifugalne sile možemo uključiti u konstantu sile teže $\vec{g}$. Jednadžba gibanja glasi

$$\dot{\vec{v}} = \vec{g} + 2\left(\vec{v} \times \vec{\Omega}\right). \tag{1.57}$$

Prvi član na desnoj strani je mnogo veći od drugog pa utjecaj Coriolisove sile, sadržan u vektoru $\vec{v}_2$, možemo tretirati kao smetnju

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2\,, \quad \dot{\vec{v}}_1 = \vec{g}\,, \quad \vec{v}_1 = \vec{g}t + \vec{v}_0, \tag{1.58}$$

pri čemu je $\vec{v}_0$ brzina čestice u početnom trenutku. Uvrstimo $\vec{v}$ u jednadžbu gibanja i zanemarimo kvadratične članove malih veličina

$$\dot{\vec{v}}_2 \approx 2\left(\vec{v}_1 \times \vec{\Omega}\right) = 2t\left(\vec{g} \times \vec{\Omega}\right) + 2\left(\vec{v}_0 \times \vec{\Omega}\right). \tag{1.59}$$

Integracijom dolazimo do brzine

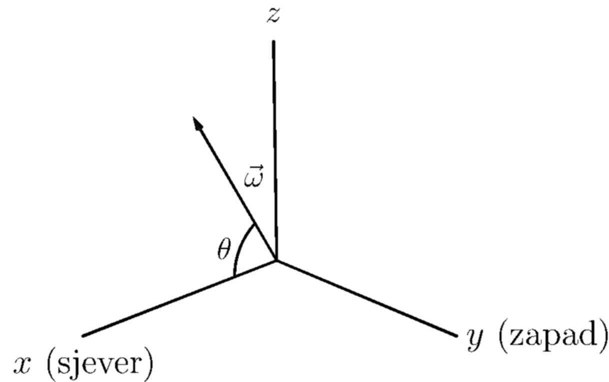
$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \approx \vec{g}t + \vec{v}_0 + t^2\left(\vec{g} \times \vec{\Omega}\right) + 2\left(\vec{v}_0 \times \vec{\Omega}\right)t. \tag{1.60}$$

Još jednom integriramo da bi doblili položaj čestice

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \frac{1}{3}t^3\left(\vec{g} \times \vec{\Omega}\right) + \left(\vec{v}_0 \times \vec{\Omega}\right)t^2, \tag{1.61}$$

pri čemu je $\vec{r}_0$ početni položaj čestice. Izaberemo koordinatni sustav tako da vrijedi

$$\vec{g} = -g\vec{k}, \quad \vec{\Omega} = \Omega\cos\theta\vec{i} + \Omega\sin\theta\vec{k}. \tag{1.62}$$



Slika 1.4: Koordinatni sustav vezan uz površinu Zemlje, zajedno s vektorom kutne brzine Zemlje.

Na polu vrijedi $\theta = \pi/2$, dok je na ekvatoru $\theta = 0$. Ukoliko čestica slobodno pada ($\vec{v}_0 = 0$) otklon iznosi

$$\delta\vec{r} = \frac{1}{3}t^3\left(\vec{g}\times\vec{\Omega}\right) = -\frac{1}{3}t^3 g\Omega\cos\theta. \tag{1.63}$$

Čestica se otklanja prema istoku.

1.4 Gibanje u blizini površine Zemlje

1.4.1 Jednadžbe gibanja

Pri opisu gibanja na površini Zemlje koristimo dva koordinatna sustava

- fiksni sustav s ishodištem u središtu Zemlje
- pomični sustav koji rotira zajedno sa Zemljom, a ima ishodište na površini Zemlje

U svim daljnjim razmatranjima pretpostavljamo da je kutna brzina rotacije Zemlje konstantna

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0. \tag{1.64}$$

Na česticu djeluje gravitacijska sila

$$\vec{F} = -\frac{GM_z m}{r'^3}\vec{r}', \tag{1.65}$$

pa jednadžba gibanja u inercijalnom sustavu glasi

$$m\vec{a}_F = \vec{F} = -\frac{GM_z m}{r'^3}\vec{r}'. \tag{1.66}$$

Koristeći formulu za akceleraciju u nepomičnom sustavu dolazimo do jednadžbe gibanja u odnosu na površinu Zemlje

$$\vec{a}_M = -\frac{GM_z}{r'^3}\vec{r}' - \left.\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right|_F - 2\vec{\omega}\times\vec{v}_M - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}). \tag{1.67}$$

Akceleracija ishodišta pomičnog sustava odgovara centripetalnoj akceleraciji

$$\left.\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right|_F = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}). \tag{1.68}$$

Uvodimo oznaku za akceleraciju sile teže

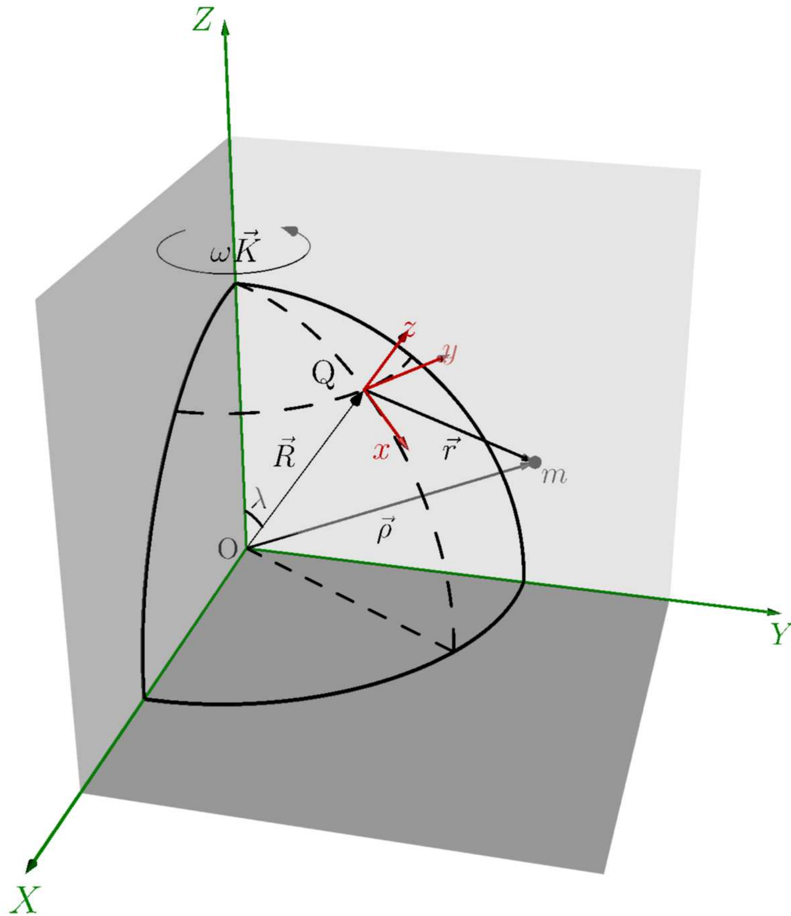
$$\vec{g} = -\frac{GM_z}{r'^3}\vec{r}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}). \tag{1.69}$$

Ako se gibanje odvija dovoljno blizu površine Zemlje, ubrzanje sile teže je približno konstantno

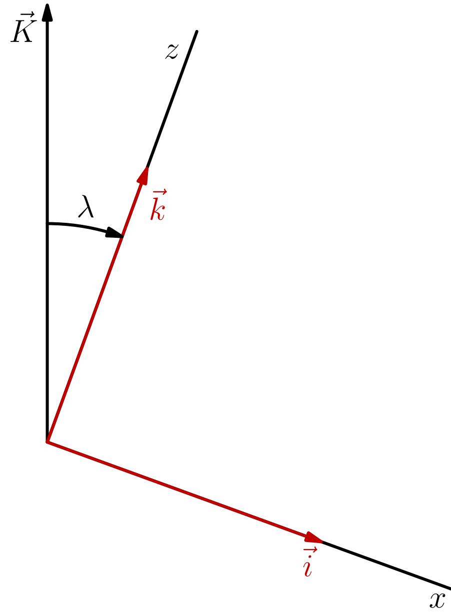
$$\vec{g} = -g\vec{k} \approx -9.81\mathrm{ms}^{-2}\vec{k}. \tag{1.70}$$

Jednadžba gibanja, uz $\vec{v}_M \equiv \vec{v}$ i $\vec{a}_M \equiv \vec{a}$,

$$\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{1.71}$$



Slika 1.5: Inercijalni sustav XYZ ima ishodište u središtu Zemlje, dok pomični sustav ima ishodište na površini Zemlje i rotira zajedno s njom.



Slika 1.6: Projekcija na ravninu xz.

Zadnji član u jedn. (1.71) je zanemariv blizu površine Zemlje jer je kutna brzina rotacije mala. Jednadžba gibanja svodi se na

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}. \tag{1.72}$$

U daljnjem postupku rješavanja jednadžbi gibanja također sustavno zanemarujemo članove kvadratične u ω.

Pretpostavimo da se gibanje odvija na zemljopisnoj širini $\pi/2 - \lambda$. Pomični sustav orjentiramo tako da os x gleda prema jugu, os y prema istoku, a os z vertikalno prema gore. Jedinični vektor $\vec{K}$ nepomičnog sustava

$$\vec{K} = (\vec{K} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{K} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{K} \cdot \vec{k})\vec{k}. \tag{1.73}$$

Sa sl. 1.6 možemo pročitati skalarne produkte jediničnih vektora

$$\vec{K} \cdot \vec{i} = \cos\left(90^0 + \lambda\right) = -\sin\lambda, \tag{1.74}$$

$$\vec{K} \cdot \vec{j} = 0, \tag{1.75}$$

$$\vec{K} \cdot \vec{k} = \cos\lambda. \tag{1.76}$$

Fiksni sustav orijentiramo tako da os Z ima smjer kutne brzine Zemlje

$$\vec{\omega} = \omega\vec{K} = -\omega\sin\lambda\vec{i} + \omega\cos\lambda\vec{k}. \tag{1.77}$$

Izračunamo vektorski produkt

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \omega \left(-\sin\lambda \vec{i} + \cos\lambda \vec{k} \right) \times \left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \right) \quad (1.78)$$

$$= -\omega \cos\lambda \dot{y}\vec{i} + \omega \left(\cos\lambda \dot{x} + \sin\lambda \dot{z} \right) \vec{j} - \omega \dot{y} \sin\lambda \vec{k}. \quad (1.79)$$

Konstanta sile teže $\vec{g}$ leži na osi z pomičnog sustava

$$\vec{g} = -g\vec{k}. \quad (1.80)$$

Jednadžba gibanja raspisana po komponentama

$$\ddot{x} = 2\omega \cos\lambda \dot{y}, \quad (1.81)$$

$$\ddot{y} = -2 \left(\omega \cos\lambda \dot{x} + \omega \sin\lambda \dot{z} \right), \quad (1.82)$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega \sin\lambda \dot{y}. \quad (1.83)$$

1.4.2 Primjer: slobodan pad

Pretpostavimo da s visine h iznad površine Zemlje ispustimo kamen. Želimo naći otklon zbog Coriolisove sile, rješavajući jednadžbe

$$\ddot{x} = 2\omega \cos\lambda \dot{y}, \quad (1.84)$$

$$\ddot{y} = -2 \left(\omega \cos\lambda \dot{x} + \omega \sin\lambda \dot{z} \right), \quad (1.85)$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega \sin\lambda \dot{y}, \quad (1.86)$$

uz početne uvjete

$$x(0) = 0\ , \quad y(0) = 0\ , \quad z(0) = h, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0. \quad (1.87)$$

Integriramo prethodne tri jednadžbe

$$\dot{x} = 2\omega \cos\lambda y + C_1, \quad (1.88)$$

$$\dot{y} = -2\omega(\cos\lambda x + \sin\lambda z) + C_2, \quad (1.89)$$

$$\dot{z} = -gt + 2\omega \sin\lambda y + C_3. \quad (1.90)$$

Iz početnih uvjeta slijedi

$$C_1 = 0\ , \quad C_2 = 2\omega \sin\lambda h\ , \quad C_3 = 0. \quad (1.91)$$

Uvrstimo konstante C_i

$$\dot{x} = 2\omega \cos\lambda y, \quad (1.92)$$

$$\dot{y} = -2\omega(\cos\lambda x + \sin\lambda z) + 2\omega \sin\lambda h, \quad (1.93)$$

$$\dot{z} = -gt + 2\omega \sin\lambda y. \quad (1.94)$$

Set jednadžbi (1.92-1.94) možemo integrirati još jednom, barem formalno,

$$x(t) - x(0) = 2\omega \cos\lambda \int_0^t y(t')dt' \tag{1.95}$$

$$y(t) - y(0) = -2\omega \cos\lambda \int_0^t x(t')dt' - 2\omega \sin\lambda \int_0^t z(t')dt' + 2\omega \sin\lambda ht \tag{1.96}$$

$$z(t) - z(0) = -\frac{g}{2}t^2 + 2\omega \sin\lambda \int_0^t y(t')dt'. \tag{1.97}$$

Jednadžbe u kojima se nepoznate funkcije nalaze pod integralom nazivamo integralne jednadžbe. Set jednadžbi (1.95-1.97) rješavamo metodom sukcesivnih aproksimacija. U prvom koraku pretpostavimo rješenje

$$x_0(t)\ , \quad y_0(t)\ , \quad z_0(t), \tag{1.98}$$

za koje smatramo da je blizu pravog rješenja. Nultu aproksimaciju zatim uvrstimo pod integrale u jedn. (1.95-1.97) da bi dobili poboljšano rješenje

$$x_1(t)\ , \quad y_1(t)\ , \quad z_1(t). \tag{1.99}$$

Postupak ponavljamo sve dok se rješenja $(x_n,\ y_n,\ z_n)$ i $(x_{n+1},\ y_{n+1},\ z_{n+1})$ ne razlikuju za unaprijed određeni mali iznos. Pri izvodu jednadžbi gibanja smo zanemarili sve članove kvadratične u ω, pa ih moramo zanemariti i pri rješavanju jednadžbi. Dakle, ako se $(x_n,\ y_n,\ z_n)$ i $(x_{n+1},\ y_{n+1},\ z_{n+1})$ razlikuju za članove reda ω^2 našli smo rješenja jednadžbi gibanja. Pogađamo početno rješenje seta jednadžbi (1.95-1.97)

$$x_0(t) = 0\ , \quad y_0(t) = 0\ , \quad z_0(t) = 0. \tag{1.100}$$

Što je pretpostavljeno rješenje bliže pravom rješenju, broj iteracija koje moramo napraviti biti će manji. Uvrstimo pretpostavljeno rješenje u set integralnih jednadžbi

$$x_1(t) = 0 \tag{1.101}$$

$$y_1(t) = 2\omega \sin\lambda ht \tag{1.102}$$

$$z_1(t) = h - \frac{g}{2}t^2. \tag{1.103}$$

Rješenja $x_1,\ \ y_1,\ \ z_1$ opet uvrstimo u integralne jednadžbe da bi dobili popravljena rješenja. Pritom sve članove kvadratične u ω zanemarujemo

$$x_2(t) = 0 \tag{1.104}$$

$$y_2(t) = 2\omega \sin\lambda h - 2\omega \sin\lambda \int_0^t z_1(t')dt'$$

$$y_2(t) = 2\omega \sin\lambda ht - 2\omega \sin\lambda ht + 2\frac{g}{6}\omega \sin\lambda t^3$$

$$y_2(t) = \frac{g}{3}\omega \sin\lambda t^3 \tag{1.105}$$

$$z_2(t) = h - \frac{g}{2}t^2. \tag{1.106}$$

Ponovno uvrštavanje rješenja u jednadžbe daje samo nove članove proporcionalne s ω^2. To znači da smo našli rješenje do reda ω^2. Os y gleda u smjeru istoka pa se kamen ispušten s tornja otklanja prema istoku za iznos

$$y(t) = \frac{1}{3}\omega g t^3 \sin\lambda. \tag{1.107}$$

Koliki je otklon kad kamen padne na tlo? Vrijeme pada iznosi

$$z(\tau) = 0 \Longrightarrow \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \tag{1.108}$$

pa je otklon u trenutku udara u tlo

$$y(\tau) = \frac{1}{3}\omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \sin\lambda. \tag{1.109}$$

Promotrimo primjer katedrale u Zagrebu visine $h \approx 100$ m. Kutna brzina Zemlje iznosi

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} s^{-1}. \tag{1.110}$$

Zemljopisna širina $\theta \approx 46^0 \approx \frac{\pi}{4}$ pa otklon iznosi

$$y(\tau) = \frac{1}{3}\omega \frac{(2h)^{3/2}}{g^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\omega h \sqrt{\frac{h}{g}} = 0.015 \text{ m} = 1.5 \text{ cm}. \tag{1.111}$$

Dakle, kamen ispušten s vrha zagrabačke katedrale otklanja se 1.5 cm prema istoku.

Primjer 1.1

Projektil je ispaljen iz točke na površini Zemlje sa zemljopisnom širinom $\pi/2-\lambda$ na jug početnom brzinom v_0 po kutem α prema horizontali. Nađite položaj projektila nakon vremena t.

Koordinatni sustav vezan uz površinu Zemlje smo orjentirali tako da os x gleda u smjeru juga, os y u smjeru istoka, a os z vertikalno gore. U početnom trenutku čestica se nalazi na površini Zemlje

$$x(t) = y(t) = z(t) = 0. \tag{1.112}$$

Čestica je ispaljena u smjeru juga pod kutem α prema horizontali. Početna brzina čestice glasi

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha \vec{i} + v_0 \sin\alpha \vec{k}. \tag{1.113}$$

Iskoristimo jednadžbe gibanja (1.81-1.83)

$$\ddot{x} = 2\omega\cos\lambda\dot{y}, \tag{1.114}$$

$$\ddot{y} = -2\left(\omega\cos\lambda\dot{x} + \omega\sin\lambda\dot{z}\right), \tag{1.115}$$

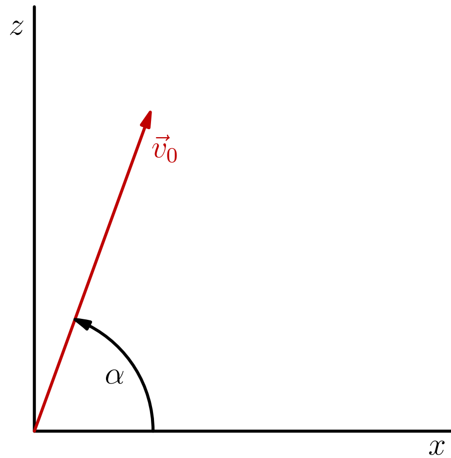
$$\ddot{z} = -g + 2\omega\sin\lambda\dot{y}. \tag{1.116}$$

Integriramo prvu jednadžbu

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(0) = 2\omega\cos\lambda\left(y(t) - y(0)\right), \tag{1.117}$$

a zatim uvrstimo početne uvjete

$$\dot{x}(t) = v_0\cos\alpha + 2\omega\cos\lambda y(t). \tag{1.118}$$



Slika 1.7: Čestica je ispaljena prema jugu pod kutem α prema horizontali.

Sada integriramo drugu jednadžbu

$$\dot{y}(t) - \dot{y}(0) = -2\omega\cos\lambda\left(x(t) - x(0)\right) - 2\omega\sin\lambda\left(z(t) - z(0)\right), \tag{1.119}$$

a zatim uvrstimo početne uvjete

$$\dot{y}(t) = -2\omega\cos\lambda x(t) - 2\omega\sin\lambda z(t). \tag{1.120}$$

Konačno, integriramo treću jednadžbu

$$\dot{z}(t) - \dot{z}(0) = -gt + 2\omega\sin\lambda\left(y(t) - y(0)\right), \tag{1.121}$$

a zatim uvrstimo početne uvjete

$$\dot{z}(t) = v_0\sin\alpha - gt + 2\omega\sin\lambda y(t). \tag{1.122}$$

Dobili smo novi set jednadžbi

$$\dot{x}(t) = v_0\cos\alpha + 2\omega\cos\lambda y(t), \tag{1.123}$$
$$\dot{y}(t) = -2\omega\cos\lambda x(t) - 2\omega\sin\lambda z(t), \tag{1.124}$$
$$\dot{z}(t) = v_0\sin\alpha - gt + 2\omega\sin\lambda y(t). \tag{1.125}$$

Integriramo prvu jednadžbu

$$x(t) - x(0) = v_0\cos\alpha t + 2\omega\cos\lambda\int_0^t y(t')dt', \tag{1.126}$$

a zatim uvrstimo početni uvjet

$$x(t) = v_0\cos\alpha t + 2\omega\cos\lambda\int_0^t y(t')dt'. \tag{1.127}$$

Sada integriramo drugu jednadžbu

$$y(t) - y(0) = -2\omega\cos\lambda\int_0^t x(t')dt' - 2\omega\sin\lambda\int_0^t z(t')dt', \tag{1.128}$$

a zatim uvrstimo početni uvjet

$$y(t) = -2\omega\cos\lambda\int_0^t x(t')dt' - 2\omega\sin\lambda\int_0^t z(t')dt'. \tag{1.129}$$

Konačno, integriramo treću jednadžbu

$$z(t) - z(0) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0\sin\alpha t + 2\omega\sin\lambda\int_0^t y(t')dt', \tag{1.130}$$

a zatim uvrstimo početni uvjet

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \alpha t + 2\omega \sin \lambda \int_0^t y(t')dt'. \quad (1.131)$$

Došli smo do seta od tri integralne jednadžbe

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t + 2\omega \cos \lambda \int_0^t y(t')dt', \quad (1.132)$$

$$y(t) = -2\omega \cos \lambda \int_0^t x(t')dt' - 2\omega \sin \lambda \int_0^t z(t')dt', \quad (1.133)$$

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \alpha t + 2\omega \sin \lambda \int_0^t y(t')dt'. \quad (1.134)$$

Da bi ih riješili koristimo metodu sukcesivnih aproksimacija. Kao nultu aproksimaciju pretpostavimo najjednostavnije rješenje

$$x_0(t) = y_0(t) = z_0(t) = 0. \quad (1.135)$$

Uvrstimo rješenje $x_0,\ y_0,\ z_0$ u integralne jednadžbe

$$x_1(t) = v_0 \cos \alpha t, \quad (1.136)$$

$$y_1(t) = 0, \quad (1.137)$$

$$z_1(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \alpha t. \quad (1.138)$$

Popravljena rješenja $x_1(t)$, $y_1(t)$ i $z_1(t)$ su zapravo formule za kosi hitac, ako bi zanemarili utjecaj rotacije Zemlje. U sljedećem koraku uvrstimo $x_1,\ y_1,\ z_1$ u integralne jednadžbe. Prva jednadžba ne donosi nikakve nove članove

$$x_2(t) = v_0 \cos \alpha t. \quad (1.139)$$

Druga jednadžba

$$y_2(t) = -2\omega \cos \lambda \int_0^t (v_0 \cos \alpha t')\, dt' - 2\omega \sin \lambda \int_0^t \left(-\frac{g}{2}t'^2 + v_0 \sin \alpha t'\right) dt', \quad (1.140)$$

nakon integracije prelazi u

$$y_2(t) = -\omega \cos \lambda v_0 \cos \alpha t^2 + \frac{g}{3}\omega \sin \lambda t^3 - \omega \sin \lambda v_0 \sin \alpha t^2, \quad (1.141)$$

$$y_2(t) = -\omega v_0 \cos (\lambda - \alpha) t^2 + \frac{g}{3}\omega \sin \lambda t^3. \quad (1.142)$$

Integriranje treće jednadžbe ne donosi nikakve nove članove

$$z_2(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \alpha t. \quad (1.143)$$

Sljedeći korak je uvrštavanje rješenja $x_2,\ y_2,\ z_2$ u integralne jednadžbe. Jedini dodatni članovi koji se pojavljuju su proporcionalni s ω^2, a njih sustavno zanemarujemo. Rješenje jednadžbi gibanja

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t, \tag{1.144}$$

$$y(t) = -\omega v_0 \cos(\lambda - \alpha) t^2 + \frac{g}{3} \omega \sin \lambda t^3, \tag{1.145}$$

$$z(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 \sin \alpha t. \tag{1.146}$$

Rotacija Zemlje ne utječe na komponente x(t) i z(t) do članova reda veličine ω^2. Projektil se zbog rotacije Zemlje otklanja u smjeru istok/zapad, ovisno o početnoj brzini i zemljopisnoj širini

1.5 Foucaultovo njihalo

Izvodimo jednadžbe gibanja matematičkog njihala uzimajući u obzir efekte rotacije Zemlje. Pretpostavimo da duljina niti njihala iznosi l, a masa čestice na kraju niti m. Koordinatni sustav xyz vezan je uz površinu Zemlje, a ishodište mu se nalazi u točki ravnoteže njihala Na česticu djeluju sila teža $m\vec{g}$ i napetost niti $\vec{T}$. Ako s $\vec{r}$ označimo položaj čestice, tri vektora na sl. 1.8 povezana su relacijom

$$l\vec{k} = \vec{r} + l\frac{\vec{T}}{T} \Longrightarrow \vec{T} = T\vec{k} - \frac{T}{l}\vec{r}. \tag{1.147}$$

Napetost niti rastavimo na komponente

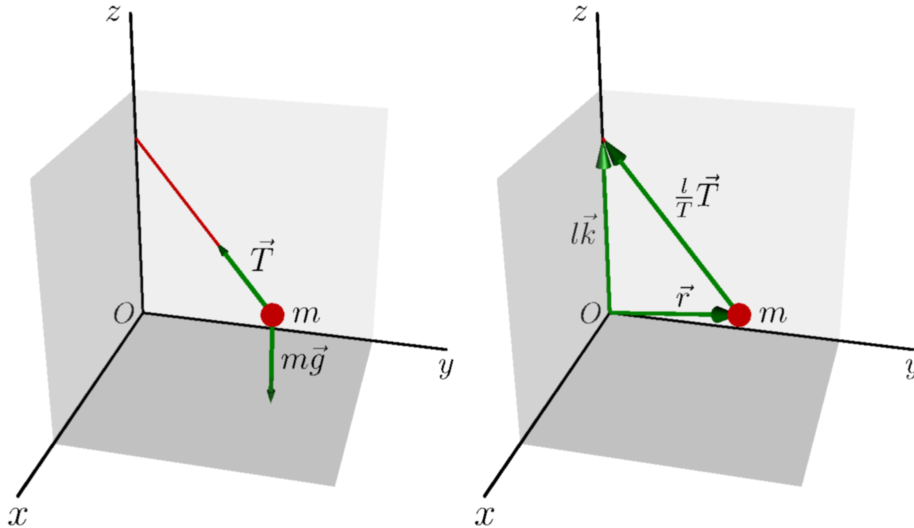
$$\vec{T} = \left(\vec{T}\cdot\vec{i}\right)\vec{i} + \left(\vec{T}\cdot\vec{j}\right)\vec{j} + \left(\vec{T}\cdot\vec{k}\right)\vec{k}, \tag{1.148}$$

a zatim ih izračunamo iz jedn. (1.147)

$$T_x = \vec{T}\cdot\vec{i} = -\frac{x}{l}T, \tag{1.149}$$

$$T_y = \vec{T}\cdot\vec{j} = -\frac{y}{l}T, \tag{1.150}$$

$$T_z = \vec{T}\cdot\vec{k} = \frac{l-z}{l}T. \tag{1.151}$$



Slika 1.8: Koordinatni sustav vezan uz Zemlju koji koristimo pri izvodu jednadžbi gibanja njihala.

Uz ograničenje na linearne članove u ω, jednadžba gibanja u neinercijalnom sustavu glasi

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{T} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}. \tag{1.152}$$

Kao i u prethodnim primjerima, pretpostavimo da se njihalo nalazi na zemljopisnoj širini $\pi/2 - \lambda$ da bi mogli upotrijebiti rezultat (1.79)

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega \cos\lambda \dot{y}\vec{i} + \omega \left(\cos\lambda \dot{x} + \sin\lambda \dot{z}\right)\vec{j} - \omega \dot{y} \sin\lambda \vec{k}. \tag{1.153}$$

Jednadžbu gibanja (1.152) rastavimo na komponente

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{l}T + 2m\omega \cos\lambda \dot{y}, \tag{1.154}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{y}{l}T - 2m\omega \left(\sin\lambda \dot{z} + \cos\lambda \dot{x}\right), \tag{1.155}$$

$$m\ddot{z} = \frac{l-z}{l}T - mg + 2m\omega \sin\lambda \dot{y}, \tag{1.156}$$

pri čemu smo uzeli u obzir $\vec{g} = -g\vec{k}$. Ako se ograničimo na male oscilacije njihala

$$\frac{l-z}{l} \approx 1, \quad \ddot{z} \ll \ddot{x}, \ddot{y}, \quad \dot{z} \ll \dot{x}, \dot{y}, \tag{1.157}$$

jednažbe gibanja se pojednostavljuju

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{l}T + 2m\omega \cos\lambda \dot{y}, \tag{1.158}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{y}{l}T - 2m\omega \cos\lambda \dot{x}, \tag{1.159}$$

$$T = mg - 2m\omega \sin\lambda \dot{y}, \tag{1.160}$$

Uvrstimo napetost niti u prve dvije jednadžbe

$$\ddot{x} = -g\frac{x}{l} + \frac{2x}{l}\omega \dot{y} \cos\lambda + 2\omega \dot{y} \cos\lambda, \tag{1.161}$$

$$\ddot{y} = -g\frac{y}{l} + \frac{2y}{l}\omega \dot{y} \cos\lambda - 2\omega \dot{x} \cos\lambda. \tag{1.162}$$

Drugi član u obje jednadžbe je produkt dvije male veličine (x/l i ω ili y/l i ω) pa ga možemo zanemariti. Preostaju nam dvije vezane linearne diferencijalne jednadžbe

$$\ddot{x} = -g\frac{x}{l} + 2\omega \dot{y} \cos\lambda, \tag{1.163}$$

$$\ddot{y} = -g\frac{y}{l} - 2\omega \dot{x} \cos\lambda. \tag{1.164}$$

Da bi riješili jednadžbe gibanja (1.163) i (1.164), potrebni su nam početni uvjeti. Neka čestica na početku gibanja miruje u ravnini xz

$$x(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0 \quad \text{i} \quad y(0) = A. \tag{1.165}$$

Jednadžbe prvo napišemo u nešto kompaktnijem obliku koristeći oznake

$$\Omega^2 = \frac{g}{l} \quad \text{i} \quad \alpha = \omega \cos \lambda, \tag{1.166}$$

$$\ddot{x} = -\Omega^2 x + 2\alpha \dot{y}, \tag{1.167}$$

$$\ddot{y} = -\Omega^2 y - 2\alpha \dot{x}, \tag{1.168}$$

a zatim ih rješavamo pomoću kompleksnih brojeva. Drugu jednadžbu pomnožimo s kompleksnom jedinicom i, te je pribrojimo prvoj jednadžbi

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -\Omega^2(x + iy) - 2i\alpha\left(\dot{x} + i\dot{y}\right). \tag{1.169}$$

Napravimo supstituciju $u = x + iy$

$$\ddot{u} + 2i\alpha\dot{u} + \Omega^2 u = 0. \tag{1.170}$$

Rješenje pretpostavimo u obliku

$$u(t) = Ce^{\gamma t}, \tag{1.171}$$

pri čemu su C i γ kompleksni brojevi koje tek trebamo odrediti. Uvrštavanjem rješenja (1.171) u jedn. (1.170) dolazimo da algebarske jednadžbe

$$\gamma^2 + 2i\gamma\alpha + \Omega^2 = 0 \Longrightarrow \gamma = -i\alpha \pm i\sqrt{\alpha^2 + \Omega^2}. \tag{1.172}$$

Rotacija Zemlje predstavlja malu korekciju ($\alpha \ll \Omega$) pa u izrazu pod korijenom možemo zanemariti član α^2. Konstanta γ ima dva rješenja

$$\gamma = -i\alpha \pm i\Omega, \tag{1.173}$$

koja odgovaraju linearno nezavisnim rješenjima jedn. (1.170)

$$u_1 \sim e^{-i(\alpha - \Omega)t} \quad \text{i} \quad u_2 \sim e^{-i(\alpha + \Omega)t}. \tag{1.174}$$

Opće rješenje je njihova linearna kombinacija

$$u = (C_1 + iC_2)e^{-i(\alpha - \Omega)t} + (C_3 + iC_4)e^{-i(\alpha + \Omega)t}. \tag{1.175}$$

Rastavimo rješenje na realni i imaginarni dio

$$u_r = C_1 \cos(\alpha - \Omega)t + C_2 \sin(\alpha - \Omega)t + C_3 \cos(\alpha + \Omega)t + C_4 \sin(\alpha + \Omega)t, \tag{1.176}$$

$$u_i = C_2 \cos(\alpha - \Omega)t - C_1 \sin(\alpha - \Omega)t + C_4 \cos(\alpha + \Omega)t - C_3 \sin(\alpha + \Omega)t. \tag{1.177}$$

Vratimo li se supstituciji $u = x + iy$, možemo izjednačiti realne i imaginarne dijelove

$$x = C_1 \cos(\alpha - \Omega)t + C_2 \sin(\alpha - \Omega)t + C_3 \cos(\alpha + \Omega)t + C_4 \sin(\alpha + \Omega)t, \quad (1.178)$$

$$y = C_2 \cos(\alpha - \Omega)t - C_1 \sin(\alpha - \Omega)t + C_4 \cos(\alpha + \Omega)t - C_3 \sin(\alpha + \Omega)t. \quad (1.179)$$

Konstante C_i možemo izračunati iz početnih uvjeta.

- prvi početni uvjet

$$x(0) = 0 \Longrightarrow C_1 + C_3 = 0 \Longrightarrow C_1 = -C_3 \quad (1.180)$$

- drugi početni uvjet

$$\dot{x}(0) = 0 \Longrightarrow C_4 = -\frac{\alpha - \Omega}{\alpha + \Omega} C_2 \Longrightarrow C_4 \approx C_2 \quad (1.181)$$

- treći početni uvjet

$$\dot{y}(0) = 0 \Longrightarrow -C_1(\alpha - \Omega) - C_3(\alpha + \Omega) = 0 \Longrightarrow C_1 = -\frac{\alpha + \Omega}{\alpha - \Omega} \quad (1.182)$$

$$\Longrightarrow C_1 \approx C_3. \quad (1.183)$$

- četvrti početni uvjet

$$y(0) = A \Longrightarrow C_2 + C_4 = A \quad (1.184)$$

Kombinacija uvjeta (1.181) i (1.184) vodi na zaključak

$$C_2 = C_4 = \frac{A}{2}, \quad (1.185)$$

dok kombinacija uvjeta (1.180) i (1.183) vodi na

$$C_1 = C_3 = 0. \quad (1.186)$$

Koordinate njihala x i y poprimaju jednostavan oblik

$$x(t) = \frac{A}{2} \sin(\alpha - \Omega)t + \frac{A}{2} \sin(\alpha + \Omega)t = A \cos \Omega t \sin \alpha t, \quad (1.187)$$

$$y(t) = \frac{A}{2} \cos(\alpha - \Omega)t + \frac{A}{2} \cos(\alpha + \Omega)t = A \cos \Omega t \cos \alpha t. \quad (1.188)$$

Položaj njihala u xy ravnini možemo napisati u vektorskom obliku

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = A \cos(\Omega t)\vec{n}, \quad (1.189)$$

pri čemu smo definirali jedinični vektor

$$\vec{n} = \vec{i} \sin \alpha t + \vec{j} \cos \alpha t. \tag{1.190}$$

Njihalo oscilira u ravnini koja siječe os z. Ravnina u kojoj se njihalo giba vrlo sporo rotira oko osi z ($\alpha \ll \Omega$). Na sjevernoj hemisferi vrijedi

$$0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos \lambda \geq 0 \Longrightarrow \alpha \geq 0, \tag{1.191}$$

dok na južnoj hemisferi vrijedi

$$\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \pi \Longrightarrow \cos \lambda \leq 0 \Longrightarrow \alpha \leq 0. \tag{1.192}$$

Stoga na sjevernoj hemisferi ravnina u kojoj njihalo oscilira rotira u smjeru kazaljke na satu, a na južnoj hemisferi u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Kao primjer promotrimo njihalo u Parizu, na 48^0 sjeverne zemljopisne širine. Kutna brzina rotacije ravnine njihala iznosi

$$\alpha = \omega \cos \lambda = \frac{2\pi}{24 \text{ h}} \cos 42^0, \tag{1.193}$$

pa odmah možemo izračunati period vrtnje ravnine njihala

$$\tau = \frac{24h}{\cos 42^0} = 32.3 \text{ h}. \tag{1.194}$$